Logické programování
s omezujícími podmínkami
Constraint Logic Programming: CLP

CP: elektronické materiály

- Dechter, R. **Constraint Processing.** Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
  - `http://www.ics.uci.edu/~dechter/books/`
- Barták R. **Přednáška Omezující podmínky na MFF UK, Praha**.
  - `http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/podminky/prednaska.html`
- **SICStus Prolog User's Manual**, 2004. Kapitola o CLP(FD).
  - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/sicstus/doc/html/`
- **Příklady v distribuci SICStus Prologu**: cca 25 příkladů, zdrojový kód
  - `aisa:/software/sicstus-3.10.1/lib/sicstus-3.10.1/library/clpfd/examples/`
- **Constraint Programming Online**
  - `http://slash.math.unipd.it/cp/index.php`

Probírané oblasti

- Obsah
  - úvod: od LP k CLP
  - základy programování
  - základní algoritmy pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- Příbuzné přednášky na FI
  - PA163 Programování s omezujícími podmínkami
    - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/cp`
  - PA167 Rozvrhování
    - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/rozvrhovani`
    - zahrnuty CP techniky pro řešení rozvrhovacích problémů

Historie a současnost

- **1963** interaktivní grafika (Sutherland: Sketchpad)
- **Polovina 80. let:** logické programování omezujícími podmínkami
- **Od 1990:** komerční využití
- Už v roce **1996:** výnos řádově stovky milionů dolarů
- Aplikace – příklady
  - **Lufthansa:** krátkodobé personální plánování
    - reakce na změny při dopravě (zpoždění letadla, . . .)
    - minimalizace změny v rozvrhu, minimalizace ceny
  - **Nokia:** automatická konfigurace sw pro mobilní telefony
  - **Renault:** krátkodobé plánování výroby, funkční od roku 1995

Omezení (*constraint*)

- Dána
  - množina **(doménových) proměnných** $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$
  - **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \dots, D_k\}$

  Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \dots \times D_k$
  - omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně
- Příklad:
  - proměnné: A,B
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B
  - omezení: A≠B nebo (A,B) ∈ {(0,1),(0,2),(1,2)}
- Omezení c definováno na $y_1, \dots y_k$ je **splněno**, pokud pro $d_1 \in D_1, \dots d_k \in D_k$ platí $(d_1, \dots d_k) \in c$
  - příklad (pokračování): omezení splněno pro $(0,1), (0,2), (1,2)$, není splněno pro $(1,1)$

Problém splňování podmínek (CSP)

- Dána
  - konečná množina **proměnných** $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
  - konečná množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \dots, D_n\}$
  - konečná množina **omezení** $C = \{c_1, \dots, c_m\}$
    - omezení je definováno na podmnožině X

  Problém splňování podmínek je trojice (X, D, C)
  (constraint satisfaction problem)
- Příklad:
  - proměnné: A,B,C
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B {0,2} pro C
  - omezení: A≠B, B≠C

Řešení CSP

- **Částečné ohodnocení proměnných** $(d_1, \dots, d_k), k < n$
  - některé proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Úplné ohodnocení proměnných** $(d_1, \dots, d_n)$
  - všechny proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Řešení CSP**
  - úplné ohodnocení proměnných, které splňuje všechna omezení
  - $(d_1, \dots, d_n) \in D_1 \times \dots \times D_n$ je **řešení** (X, D, C)
    - pro každé $c_i \in C$ na $x_{i_1}, \dots x_{i_k}$ platí $(d_{i_1}, \dots d_{i_k}) \in c_i$
- Hledáme: jedno nebo
  všechna řešení nebo
  optimální řešení (vzhledem k objektivní funkci)

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** `Jan, Petr, ...`
- **domény:** $\{3,4,5,6\}, \{3,4\}, \dots$
- **omezení:** `all_distinct([Jan,Petr,...])`
- **částečné ohodnocení:** `Jan=6, Anna=5, Marie=1`
- **úplné ohodnocení:**
  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4,` **Marie=6**
- **řešení CSP:**
  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, Marie=1`
- **všechna řešení:** ještě `Jan=6,` **Petr=4**`, Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`
- optimálizace: ženy učí co nejdříve
  `Anna+Eva+Marie #= Cena` minimalizace hodnoty proměnné Cena
  optimální řešení: `Jan=6,` **Petr=4,** `Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

CLP(FD) program

- Základní struktura **CLP programu**
  1. definice proměnných a jejich domén
  2. definice omezení
  3. hledání řešení
- (1) a (2) deklarativní část
  - **modelování** problému
  - vyjádření problému splňování podmínek
- (3) řídící část
  - **prohledávání** stavového prostoru řešení
  - procedura pro hledání řešení (enumeraci) se nazývá **labeling**
  - umožní nalézt jedno, všechna nebo optimální řešení

Kód CLP(FD) programu

```
% základní struktura CLP programu
solve( Variables ) :-
     declare_variables( Variables ),        domain([Jan],3,6], ...
     post_constraints( Variables ),         all_distinct([Jan,Petr,...])
     labeling( Variables ).

% triviální labeling
labeling( [] ).
labeling( [Var|Rest]  ) :-
     fd_min(Var,Min),                  % výběr nejmenší hodnoty z domény
     ( Var#=Min, labeling( Rest )
     ;
       Var#>Min , labeling( [Var|Rest] )
     ).
```


Příklad: algebrogram

- Přiřaďte cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
  - SEND + MORE = MONEY
  - různá písmena mají přiřazena různé cifry
  - S a M nejsou 0
- `domain([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), domain([S,M],1,9)`
- ```
                1000*S + 100*E + 10*N + D
  +             1000*M + 100*O + 10*R + E
  #=  10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y
  ```
- `all_distinct( [S,E,N,D,M,O,R,Y] )`
- `labeling( [S,E,N,D,M,O,R,Y] )`

Od LP k CLP I.

- CLP: rozšíření logického programování o omezující podmínky
- CLP systémy se liší podle typu domény
  - **CLP($\mathcal{A}$)** generický jazyk
  - **CLP(FD)** domény proměnných jsou konečné *(Finite Domains)*
  - **CLP($\mathbb{R}$)** doménou proměnných je množina reálných čísel
- Cíl
  - využít syntaktické a výrazové přednosti LP
  - dosáhnout větší efektivity
- **Unifikace v LP je nahrazena splňováním podmínek**
  - unifikace se chápe jako **jedna z** podmínek
  - `A = B`
  - `A #< B,  A in 0..9,  domain([A,B],0,9),  all_distinct([A,B,C])`
  ```

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
  - `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`
  - po provedení `A #= 1` se z `B #< A` se odvodí: `B #= 0`
- **Podmínky jako výstup**
  - kompaktní reprezentace nekonečného počtu řešení, výstup lze použít jako vstup
  - dotaz: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    výstup: `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`

Syntaxe CLP

- Výběr jazyka omezení
- CLP klauzule

  jako LP klauzule, ale její tělo může obsahovat omezení daného jazyka

```
p(X,Y) :- X #< Y+1, q(X), r(X,Y,Z).
```

- Rezoluční krok v LP
  - kontrola existence mgu mezi cílem a hlavou
- Krok odvození v CLP také zahrnuje
  - kontrola konzistence aktuální množiny omezení s omezeními v těle klauzule

⇒ Vyvolání dvou řešičů: unifikace + řešič omezení

Operační sémantika CLP

- CLP výpočet cíle G
  - $Store$ množina aktivních omezení ≡ **prostor omezení *(constraint store)***
  - inicializace $Store = \emptyset$
  - seznamy cílů v G prováděny v obvyklém pořadí
  - pokud narazíme na cíl s omezením c: $NewStore = Store \cup \{c\}$
  - snažíme se splnit c vyvoláním jeho řešiče
    - při neúspěchu se vyvolá backtracking
    - při úspěchu se podmínky v $NewStore$ zjednoduší propagací omezení
  - zbývající cíle jsou prováděny s upraveným $NewStore$
- CLP výpočet cíle G je úspěšný, pokud se dostaneme z iniciálního stavu $\langle G, \emptyset \rangle$ do stavu $\langle G', Store \rangle$, kde G' je prázdný cíl a $Store$ je splnitelná.

CLP(FD) v SICStus Prologu

Nejpoužívanější systémy a jazyky pro CP

- **Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog** 1985
  - silná CLP(FD) knihovna, komerční i akademické použití pro širokou škálu platforem
- **IC-PARC, Imperial College London, Cisco Systems: ECL^{i}PS^e** 1984
  - široké možnosti kooperace mezi různými řešičemi: konečné domény, reálná čísla, `repair`
  - od 2004 vlastní Cisco Systems volně dostupné pro akademické použití, rozvoj na IC-PARC, platformy: Windows, Linux, Solaris
- **ILOG, omezující podmínky v C++** 1987
  - komerční společnost, vznik ve Francie, nyní rozšířená po celém světě
  - implementace podmínek založena na objektově orientovaném programování
- `http://www.fi.muni.cz/~hanka/bookmarks.html#tools`
  - cca 50 odkazů na nejrůznější systémy: Prolog, C++, Java, Lisp, ...
  - COSYTEC: CHIP, PrologIA: Prolog IV, Siemens: IF Prolog,
    akademický: Mozart (objektově orientované, deklarativní programování, *concurrency*), ...

CLP(FD) v SICStus Prologu

- CLP není dostupné v SWI Prologu
- CLP knihovna v ECLiPSe se liší
- Vestavěné predikáty jsou dostupné v separátním modulu (knihovně)
  `:- use_module(library(clpfd)).`
- Obecné principy platné všude
- Stejné/podobné vestavěné predikáty existují i jinde

Příslušnost k doméně: Range termy

- `?- domain( [A,B], 1,3).` `domain( +Variables, +Min, +Max)`
  `A in 1..3`
  `B in 1..3`
- `?- A in 1..8, A #\= 4.` `?X in +Min..+Max`
  `A in (1..3) \/ (5..8)`
- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel
- `?- A in (1..3) \/ (8..15) \/ (5..9) \/ {100}.` `?X in +Range`
  `A in (1..3) \/ (5..15) \/ {100}`
- Zjištění domény Range proměnné Var: `fd_dom(?Var,?Range)`
  - `A in 1..8, A #\= 4, fd_dom(A,Range).` `Range=(1..3) \/ (5..8)`
  - `A in 2..10, fd_dom(A,(1..3) \/ (5..8)).` `no`
- Range term: reprezentace nezávislá na implementaci

Příslušnost k doméně: FDSet termy

- FDSet term: reprezentace závislá na implementaci
- `?- A in 1..8, A #\= 4, fd_set(A,FDSet).` `fd_set(?Var,?FDSet)`
  `A in (1..3) \/ (5..8)`
  `FDSet = [[1|3],[5|8]]`
- `?- A in 1..8,A #\= 4, fd_set(A,FDSet),B in_set FDSet.` `?X in_set +FDSet`
  `A in (1..3) \/  (5..8)`
  `FDSet = [[1|3],[5|8]]`
  `B in (1..3) \/  (5..8)`
- FDSet termy představují nízko-úrovňovou implementaci
- FDSet termy nedoporučeny v programech
  - používat pouze predikáty pro manipulaci s nimi
  - omezit použití `A in_set [[1|2],[6|9]]`
- Range termy preferovány

Další fd_... predikáty

- `fdset_to_list(+FDset, -List)` vrací do seznamu prvky FDset
- `list_to_fdset(+List, -FDset)` vrací FDset odpovídající seznamu
- `fd_var(?Var)` je Var doménová proměnná?
- `fd_min(?Var,?Min)` nejmenší hodnota v doméně
- `fd_max(?Var,?Max)` největší hodnota v doméně
- `fd_size(?Var,?Size)` velikost domény
- `fd_degree(?Var,?Degree)` počet navázaných omezení na proměnné
  - mění se během výpočtu: pouze aktivní omezení, i odvozená aktivní omezení

Aritmetická omezení

- `Expr RelOp Expr`

  `RelOp -> #= | #\= | #< | #=< | #> | #>=`
  - `A + B #=< 3,`
    `A #\= (C - 4) * ( D - 5), A/2 #= 4`
- `sum(Variables,RelOp,Suma)`
  - `domain([A,B,C,F],1,3),`
    `sum([A,B,C],#= ,F)`
- `scalar_product(Coeffs,Variables,RelOp,ScalarProduct)`
  - `domain([A,B,C,F],1,6),`
    `scalar_product( [1,2,3],[A,B,C],#= ,F)`

Výroková omezení, reifikace

- **Výroková omezení** pozor na efektivitu
  - `\#` negace, `#/\` konjunkce, `#\/` disjunkce, `#<=>` ekvivalence, ...
  - `X #> 4 #/\ Y #< 6`
  - za předpokladu `A in 1..4`:

`A#\= 3, A#\= 4`	`A#\= 3 #/\ A#\= 4`	`A#=1 #\/ A#=2`
A in (inf..2)\/ (5..sup)	A in (inf..2)\/ (5..sup)	A in inf..sup

  tj. propagace disjunkce A#=1 #\/ A#=2 je příliš slabá (propagační algoritmy příliš obecné)
- **Reifikace** pozor na efektivitu
  - `Constraint #<=> Bool`
    `Bool in 0..1` v závislosti na tom, zda je `Constraint` splněn
  - příklad: `A in 1..10 #<=> Bool`
  - za předpokladu `X in 3..10, Y in 1..4, Bool in 0..1`

    porovnej rozdíl mezi X#<Y a `X#<Y #<=> Bool`

    X = 3, Y = 4 | X in 3..10, Y in 1..4, Bool in 0..1

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

```
exactly(_, [], 0).
exactly(X, [Y|L], N) :-
        X #= Y #<=> B,          % reifikace
        N #= M+B,               % doménová proměnná místo akumulátoru
        exactly(X, L, M).
```

  - `| ?- domain([A,B,C,D,E,N],1,2), exactly(1,[A,B,C,D,E],N),A#< 2,B#< 2.`
    `A = 1, B = 1, C = 2, D = 2, E = 2, N = 2`
- Vyzkoušejte si
  - `greaters(X,S,N)`: přesně N prvků v seznamu S je větší než X
  - `atleast(X,S,N)`: alespoň N prvků v seznamu S je rovno X
  - `atmost(X,S,N)`: nejvýše N prvků v seznamu S je rovno X

Základní kombinatorická omezení

- `element(N,List,X)`
  - omezení na konkrétní prvek seznamu
- `global_cardinality(List, [Key-Count | _ ])`
  - omezení na počet prvků daného typu v seznamu
- `all_distinct(List)`
  - všechny proměnné různé
- `serialized(Starts,Durations)`
  - disjunktivní rozvrhování
- `disjoint2(Rectangles)`
  - nepřekrývání obdélníků
- `cumulative(Starts,Durations,Resources,Limit)`
  - kumulativní rozvrhování

Výskyty prvků v seznamu

- `element(N,List,X)`
  - N-tý prvek v seznamu `List` je roven X
  - `| ?- A in 2..10, B in 1..3, element( N, [A,B], X ), X#< 2.`
    B = 1, N = 2, X = 1, A in 2..10
- `global_cardinality(List, KeyCounts)`
  - pro každý prvek Key-Count seznamu KeyCounts platí:
    Count prvků seznamu `List` se rovná klíči Key
  - každé Key je celé číslo a vyskytuje se mezi klíči maximálně jednou
  - `global_cardinality(S, [X-N] )` je obdobné omezení `exactly(X,S,N)`
  - `| ?- A in 1..3, B in 1..3, global_cardinality( [A,B], [1-N,2-2]).`
    `A = 2, B = 2, N = 0`

Příklad: rozvrhování zaměstnanců

- vytvoření rozvrhu pro zaměstnance pracující na směny
  - `A = {R,D,N,Z,V} = {1,2,3,4,5}`
    ráno, den, noc, záloha, volno
  - `P = {Petr,Pavel,Marie,...}`
  - `W = {Po,Út,St,Čt,...}`

	Po	Út	St	Čt	...
Petr	R	N	V	R	
Pavel	R	Z	R	N	
Marie	N	V	D	D	
...					

- matice doménových proměnných: `PetrPo, PetrUt, ..., PavelPo,...`
- každý den: minimální a maximální počet zaměstnanců každou směnu

```
R1 in MinRano1..MaxRano1, D1 in MinDen1..MaxDen1, ...
global_cardinality( [PetrPo,PavelPo,MariePo,...], [1-R1,2-D1,...,5-V1] )
```

- pro každého zaměstnance: minimální a maximální počet typu směny za týden

```
R2 in MinRano2..MaxRano2, D2 in MinDen2..MaxDen2, ...
global_cardinality( [PetrPo,PetrUt,...,PetrNe], [1-R2,2-D2,...,5-V2] )
```

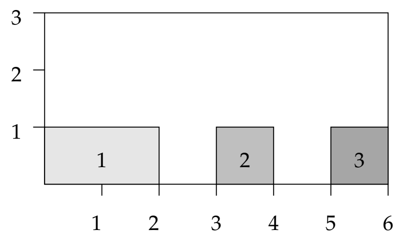

Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
  - `all_distinct` má úplnou propagaci
  - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci
- Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny
  - `all_distinct([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`
    `Jan = 6, Ota = 2, Anna = 5,`
    `Marie = 1, Petr in 3..4, Eva in 3..4`
  - `all_different([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`
    `Jan in 3..6, Petr in 3..4, Anna in 2..5,`
    `Ota in 2..4, Eva in 3..4, Marie in 1..6`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Disjunktivní rozvrhování

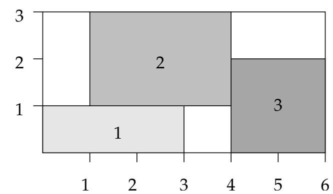
- `serialized(Starts,Durations)`
- Rozvržení úloh zadaných startovním časem (seznam `Starts`) a dobou trvání (seznam **nezáporných** `Durations`) tak, aby se nepřekrývaly
  - příklad s konstantami: `serialized`([0,3,5],[2,1,1])



  - příklad: vytvoření rozvrhu, za předpokladu, že **doba trvání hodin není stejná**
    - `D in 1..2, C = 3,`
      `serialized([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie], [D,D,D,C,C,C])`

Nepřekrývání obdélníků

- `disjoint2(Rectangles)` `disjoint1(Lines)`
  `disjoint2( [Name(X, Delka, Y, Vyska) | _ ] )`
- umístění obdélníků ve dvourozměrném prostoru
  doménové proměnné `X,Y,Delka,Vyska` mohou být z oboru **celých čísel**
  - příklad s konstantami:
    `disjoint2([rect(0,3,0,1),rect(1,3,1,2),rect(4,2,2,-2)])`

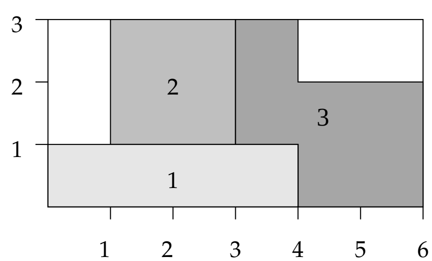


  - příklad: vytvoření rozvrhu za předpokladu, že **učitelé učí v různých místnostech**

    `D in 1..2, C = 3,`
    `disjoint2( class(Jan,D,M1,1), class(Petr,D,M2,1), class(Petr,D,M3,1), ...]`

Kumulativní rozvrhování

- `cumulative(Starts,Durations,Resources,Limit)`
- Úlohy jsou zadány startovním časem (seznam `Starts`), dobou trvání (seznam `Durations`) a požadovanou kapacitou zdroje (seznam `Resources`)
- Rozvržení úloh tak, aby celková kapacita zdroje nikdy nepřekročila `Limit`
- Příklad s konstantami: `cumulative`([0,1,3],[4,2,3],[1,2,2],3)



Příklad: kumulativní rozvrhování

- Vytvořte rozvrh pro následující úlohy, tak aby nebyla překročena kapacita 13 zdroje, a minimalizujte celkovou dobu trvání

úloha	doba trvání	kapacita
t1	16	2
t2	6	9
t3	13	3
t4	7	7
t5	5	10
t6	18	1
t7	4	11

```
schedule(Ss, End) :-
    length(Ss, 7),
    Ds = [16, 6, 13, 7, 5, 18, 4],
    Rs = [ 2, 9, 3, 7, 10, 1, 11],
    domain(Ss, 0, 51),
    domain([End], 0, 69),
    after(Ss, Ds, End),    % koncový čas
    cumulative(Ss, Ds, Rs, 13),
    append(Ss, [End], Vars),
    labeling([minimize(End)], Vars).
after([], [], _).
after([S|Ss], [D|Ds], E) :-
    E #>= S+D, after(Ss, Ds, E).
| ?-  schedule(Ss, End).
Ss = Ss = [0,16,9,9,4,4,0], End = 22 ?
```