$\boxed{1}$ $p: [2,0] + t(3,2)$

$q: [-1,2] + s(1,3)$

$$p: \begin{aligned} x &= 2 + 3\cdot t \quad /\cdot(-2) \\ y &= 0 + 2t \quad /\cdot 3 \end{aligned}$$

$$-2x = -4 - 6t$$
$$3y = 6t$$
$$\underline{-2x + 3y = -4}$$

$$q: \begin{aligned} x &= -1 + s \\ y &= 2 + 3s \end{aligned} \Bigg\} \text{ dosadím do o. r. přímky } p$$

$$-2(\underbrace{-1+s}_{x}) + 3(\underbrace{2+3s}_{y}) = -4$$
$$2 - 2s + 6 + 9s = -4$$
$$8 + 7s = -4$$
$$7s = -12$$
$$s = -\frac{12}{7}$$

$X \in p \cap q$ $\quad X: \begin{aligned} x &= -1 + \left(-\frac{12}{7}\right) = -\frac{19}{7} \\ y &= 2 + 3\left(-\frac{12}{7}\right) = -\frac{22}{7} \end{aligned}$

obecná r. p: $-2x + 3y = -4$

$$-2\left(-\frac{19}{7}\right) + 3\cdot\frac{-22}{7} =$$
$$= \frac{38}{7} - \frac{66}{7} = -\frac{28}{7} = -4 \checkmark$$

Hledaný průsečík je bod $\left[-\frac{19}{7}, -\frac{22}{7}\right]$.

$p: 2x + y = 3$

$X = [2, -2]$

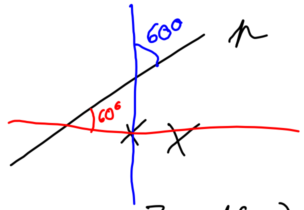
$q = ?,\ q \perp p,\ X \in q$

víme: směrový vektor q je $(2, 1)$

$q: [2, -2] + t \cdot (2, 1)$

obecná rovnice

$q: 1 \cdot x - 2 \cdot y = 6$



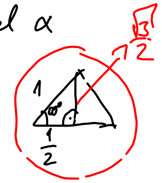
$p: [-2, 2] + t(1,2)$

$X = [3, 1]$

Jaké vektory svírají (neorientovaný) úhel $60°$ s $(1,2)$?

u, v svírají orientovaný úhel α

$$\cos\alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$



$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

hledáme $u = (a, b)$ tak, aby

$$\frac{u \cdot (1,2)}{|u| \cdot |v|} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(a,b)\cdot(1,2)}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{a+2b}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{5}}$$

zvolme $b = 1$:

$$\frac{1}{2} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{5}} \quad / \cdot \sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{5}\cdot 2$$

$$\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{5} = 2a+4 \quad /^2$$

$$(a^2+1)\cdot 5 = 4a^2+16a+16$$

$$5a^2+5 = 4a^2+16a+16$$

$$a^2-16a-11 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2+44}}{2} = 8 \pm \sqrt{64+11} = $$

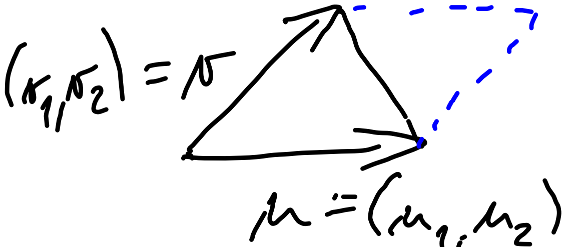
$$= 8 \pm \sqrt{75}$$

směrový vektor $u = (8 \pm \sqrt{75}, 1) = (8 \pm 5\sqrt{3}, 1)$

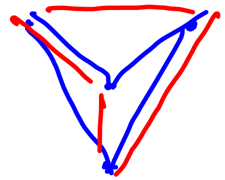
$q_1: [3, 1] + t(8+5\sqrt{3}, 1)$

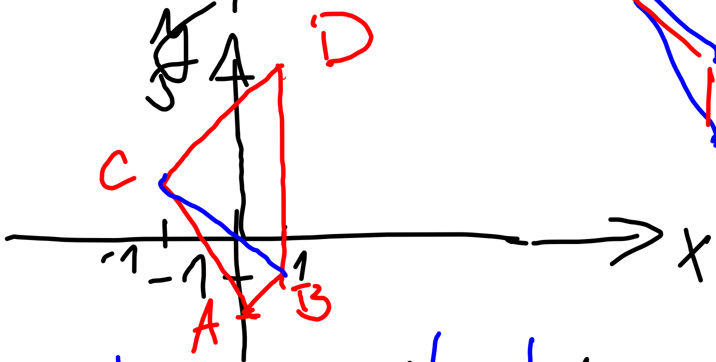
$q_2: [3, 1] + t(8-5\sqrt{3}, 1)$

$A = [0, -2],\ B = [1, -1],$
$C = [-1, 1],\ D = [1, 5];\quad S = ?$



$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$





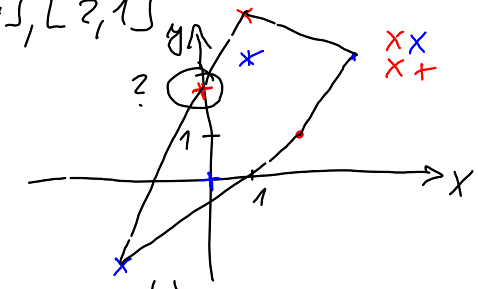
$$S_{\Delta ABC} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(3+1)\right| = 2$$

$$S_{\Delta BCD} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(-12+0)\right| = 6$$

$$S_{ABDC} = 8.$$

$[0,0], [-2,-2], [1,3], [3,3], [0,2],$

$[1,4], [2,1]$



Tip: × • •(×) +

co musí platit? a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 jsou vektory daného pětiúhelníka

$\left|\begin{matrix} a_1 \\ \times + \end{matrix}\right| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8-6 = 2 > 0 \Rightarrow +$ leží nalevo od ×•

$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 20-15 = 5 > 0 \Rightarrow OK$ •

$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20-9 = 11 > 0 \Rightarrow OK$ *

$\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6-6 = 0 \Rightarrow +$ leží na ××

konv. obal $[-2,-2], [2,1], [3,3], [1,4]$ (1, 2, 3, 4)

Jaké úsečky viditelné z $[3, \pi-2]$

1 $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & \pi \end{vmatrix} = 4\pi - 15 < 0 \Rightarrow [3, \pi-2]$ leží napravo od vektoru 1

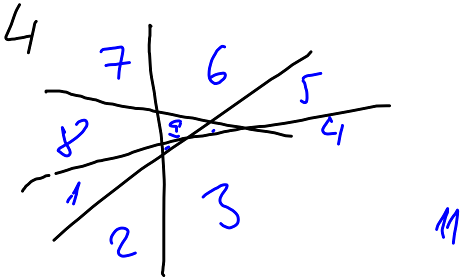
2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \pi-3 \end{vmatrix} = \pi - 3 - 2 < 0 \Rightarrow [3, \pi-2]$ — ‖ — 2

3 $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & \pi-5 \end{vmatrix} = -2\pi + 10 > 0 \Rightarrow$ nalevo

4 $\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & \pi-6 \end{vmatrix} = 18 - 3\pi + 12 > 0 \Rightarrow$ nalevo

Z bodu $[3, \pi-2]$ jsou vidět 1, 2.

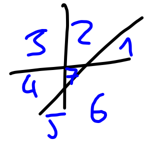
$n = 4$



$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2} = 1+4+6=11$$

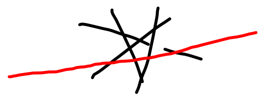
Dokažme obecně, zkusme indukci

1. $n=3$



$$\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}=7 \checkmark$$ OK

2. Předpokládejme, že máme n přímek, nejvýše dělících rovinu na $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$ částí. Dokažme, že přidáním další přímky počet nepřeroste $\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}$



Přibude $n+1$ oblastí

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{0} - \left[\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} + n+1+1 - \left[\frac{n(n-1)}{2} + n+1\right] =$$

$$= \frac{n^2+n-n^2+n}{2} + 1 = n+1.$$

Tedy indukce je ukončena.

Nechť A je množina.

Relace na množině A je podmnožina

$A \times A$ (všechny uspořádané dvojice).

$\boxed{7}$ a) 2^n

b) 2^{n^2}

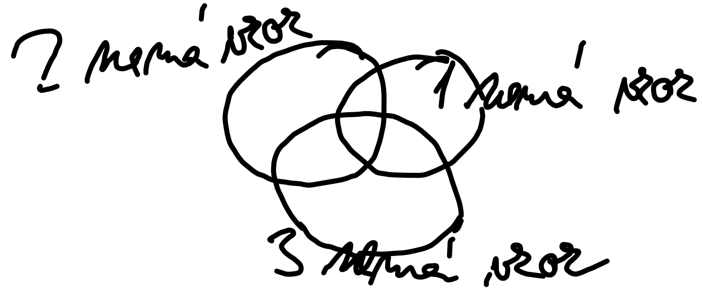
$\boxed{8}$ $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$

a) injektivní $X \to Y$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

b) surjektivní $Y \to X$

všech $3^4 = 81$



špatně: $2^4 + 2^4 + 2^4 - 1 - 1 - 1 + 0 =$

$= 3 \cdot 16 - 3 = 45$

surjektivních $81 - 45 = 36$