Soustavy rovnic, determinanty matic

Petr Pupík

31.3.2009

Soustavy rovnic s parametrem

Příklad

V závislosti na reálném parametru a řešte soustavu lineárních rovnic nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a+1)x_1 + x_2 + x_3 &= a^2 + 3a\\ x_1 + (a+1)x_2 + x_3 &= a^3 + 3a^2\\ x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a^4 + 3a^3.\end{aligned}$$

Hodnost matice

Příklad

Určete hodnost matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad

Vypočtěte determinant rozvinutím i převedením na trojúhelníkový tvar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Příklad

V $\mathbb{R}$ řešte rovnici:

$$\begin{vmatrix} 3x & 0 & x \\ -x & 0 & 2 \\ 0 & x & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanty

Příklad

Určete determinant matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ dokažte, že $|A_n| = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$, kde

$$A_n = \begin{pmatrix} x+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+1 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Čísla $697, 476, 969$ jsou beze zbytku dělitelná 17. Dokažte, že determinant matice A je také dělitelný 17, aniž byste tento determinant vyčíslovali.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Příklad

Určete inverzní matici k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo

Příklad

V $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + z &= 4 && (1)\\
x + 2y + 2z &= 6 && (2)\\
5x + y + 4z &= 21 && (3)\\
& && (4)
\end{aligned}
$$