1) a) $\underset{\mathbb{K}}{\underset{\Uparrow}{a}} \cdot \underset{V}{\underset{\Uparrow}{u}} = 0 \iff (a = 0 \vee u = 0)$

„$\Leftarrow$" i) $a = 0$ $\quad 0 \cdot u \stackrel{?}{=} 0$

z def ii) plyne $\underset{bu}{\underset{\|}{(b+0)}} \cdot u = b \cdot u + 0 \cdot u$

$\Downarrow$

$0 = 0 \cdot u$

ii) $u = 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$

z iii) v def. plyne

$\underset{r \cdot 0}{\underset{\|}{r \cdot (u+0)}} = r \cdot u + r \cdot 0$

$\Downarrow$

$0 = r \cdot 0$

„$\Rightarrow$" $a \cdot u = 0 \Rightarrow (a = 0$ nebo $u = 0)$

z ii) pravidla v def v. p. plyne

$(a+b) \cdot u = \underbrace{a \cdot u}_{0} + b \cdot u$

tedy $(a+b) \cdot u = b \cdot u$

Omlouvám se, zkusíme dokázat

b) $(-1)\cdot u = -u$

stačí nám, že

$$u + (-1)u = 0$$

podle v) $u = 1\cdot u$

$$u+(-1)\cdot u = 1\cdot u + (-1)\cdot u = (1+(-1))\cdot u =$$

$$= 0\cdot u = 0, \text{ tedy } -u = (-1)u$$

c) $a(u-v) = a\cdot u - a\cdot v$

víme, že $-v = (-1)\cdot v$, tedy

$$a(u-v) = a(u+(-1)\cdot v) = a\cdot u + a\cdot((-1)\cdot v) =$$

$$= a\cdot u + (a\cdot(-1))\cdot v = a\cdot u + (-a)\cdot v =$$

$$= a\cdot u + (-1)\cdot(a\cdot v) = a\cdot u - av$$

d) $(a-b)\cdot u = a\cdot u - b\cdot u$

$(a-b)\cdot u = \big(a + (-1)\cdot b\big)\cdot u = a\cdot u + \big((-1)\cdot b\big)\cdot u =$

$= a\cdot u + (-1)\cdot(bu) = a\cdot u - bu$

e) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} u_j\right) = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{i=n\\ j=m}} a_i u_j$

Zřejmě vyplývá z indukce a z ii) a iii) v definici v. p.

2) Dokažte, že je v. p.

a) polynomy nad $\mathbb{R}$ ... P

1) součet polynomů je polynom ✓
2) nulový polynom je neutrální vůči sčítání $(0+f=f)$
3) $-f$ je opačný polynom k f
$$f+(-f)=0=(-f)+f$$
4) sčítání polynomů je komutativní

---

1)–4): Polynomy tvoří komutativní grupa vzhledem k $+$ i)

ii) $\forall a,b\in\mathbb{R}\ \forall f\in P$
$$(a+b)\cdot f = af+bf$$
z distributivity $\mathbb{R}$

iii) $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall f,g\in P$:
$$a\cdot(f+g)=a\cdot f+a\cdot g$$
z distrib. $\mathbb{R}$

po koef.

iv) $\forall a,b\in\mathbb{R},\ \forall f\in P$:
$$a\cdot(b\cdot f)=(a\cdot b)\cdot f$$
po koeficientech – asociativita násobení v $\mathbb{R}$

v) $\forall f\in P$
$$1\cdot f=f$$ triv.

Ano P je v. p. nad $\mathbb{R}$.

3) a) $u = (1, 5, 7)$

$v = (0, 4, -1)$

$w = (0, 2, 1)$

1) $a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = 0$, atd...

2) napíšu do matice (vektory ... řádky)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ \boxed{0 \; 0 \; -3} \end{pmatrix}$$ nenulový vektor ⇒ LN (lineárně nezávislé)

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$ LN

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$ Evidentně LZ.

4) Pro která $a \in \mathbb{R}$ jsou

$u = ax^2 + x + 2$, $v = -2x^2 + ax + 3$,

$w = x^2 + 2x + a$ LZ?

Vezmeme taková $r, s, t \in \mathbb{R}$, že

$$r \cdot u + s \cdot v + t \cdot w = 0$$

$$r(ax^2 + x + 2) + s(-2x^2 + ax + 3) +$$

$$+ t(x^2 + 2x + a) = 0$$

$$(ra - 2s + t)x^2 + (r + sa + 2t)x + (2r + 3s + ta) = 0$$

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & -2 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -a \cdot I \\ -2 \cdot I \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -2-a^2 & 1-2a \\ 0 & 3-2a & a-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(3-2a) \\ \cdot(a^2+2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & (2a-3)(a^2+2) & (2a-1)(2a-3) \\ 0 & (3-2a)(a^2+2) & (a^2+2)(a-4) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & \dots & (2a-1)(2a-3) \\ 0 & 0 & a^3-6a-5 \end{pmatrix} \quad a^3 - 6a - 5 = (a+1)(a^2 - a - 5) =$$

$$a^2 - a - 5 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

pro $a = -1$, $a = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

5)

$u_1 = (-1, 3, -2, 1)$
$u_2 = (2, -1, -1, 2)$
$u_3 = (-4, 7, -3, 0)$
$u_4 = (1, 5, -5, 4)$

$a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{3,\,2,\,1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 8 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$d = 0,\ c = t,\ b = t,\ a = -2t$

$(a, b, c, d) = t(-2, 1, 1, 0)$

V max. nezávislé množině je ~~jistě~~ u_4, pak 2 z u_1, u_2, u_3. Např. $\{u_1, u_2, u_4\}$.

Pro u_5: Udělejme matici s řádk. vektory

u_1, u_2, u_4, u_5

báze podprostoru

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \overset{+2,\,+1}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 8 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \overset{-\frac{8}{5},\,-1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_5 \in \boxed{\langle u_1, u_2, u_4 \rangle} = W$ → podprostor generovaný u_1, u_2, u_4 (= Lineární obal)

u_6: $$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{+\frac{3}{5}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_6 \in W$

u_7: $$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ má hodnost 4 $\Rightarrow u_7 \notin W$