MB101 Matematika I - 10. demonstrované cvičení

Jan Herman

April 21, 2009

Obsah

Souřadnice vzhledem k bázi

Příklad 1

Ověřte, že vektor $v = (1, -2, 0, 5, 5)$ leží ve vektorovém prostoru $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$, kde $u_1 = (1, 0, -1, 2, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0, -1, 2)$, $u_3 = (2, 1, -2, 0, -1)$. Dokažte, že $\{u_1, u_2, u_3\}$ tvoří bázi U a určete souřadnice v v této bázi.

Příklad 2

Určete libovolnou bázi podprostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory $u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (-2, -3, 1, 2)$, $u_3 = (0, 1, 1, 4)$, $u_4 = (0, -1, 1, 1)$, $u_5 = (1, 1, 1, 2)$, dále určete souřadnice vektorů u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 vzhledem k této bázi.

Souřadnice vzhledem k bázi

Příklad 1

Ověřte, že vektor $v = (1, -2, 0, 5, 5)$ leží ve vektorovém prostoru $U = < u_1, u_2, u_3 > \subseteq \mathbb{R}^5$, kde $u_1 = (1, 0, -1, 2, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0, -1, 2)$, $u_3 = (2, 1, -2, 0, -1)$. Dokažte, že $\{u_1, u_2, u_3\}$ tvoří bázi U a určete souřadnice v v této bázi.

Příklad 2

Určete libovolnou bázi podprostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory $u_1 = (1, 2, 0, 1)$, $u_2 = (-2, -3, 1, 2)$, $u_3 = (0, 1, 1, 4)$, $u_4 = (0, -1, 1, 1)$, $u_5 = (1, 1, 1, 2)$, dále určete souřadnice vektorů u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 vzhledem k této bázi.

Lineární zobrazení

Definice

Lineárním zobrazením vektorových prostorů nad polem $\mathbb{K}$ rozumíme $\varphi : U \to V$, které $\forall a, b \in U, r \in \mathbb{K}$ splňuje:
$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ a
$\varphi(r \cdot a) = r \cdot \varphi(a)$.

Příklad 3

Dokažte, že jádro lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$, tedy $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{u \in U : \varphi(u) = 0\}$ je vektorový podprostor U. Obecněji, jsou-li A, resp. B podprostory U, resp. V a φ jako výše, je $\varphi(A)$ podprostorem U a $\varphi^{-1}(B) = \{u \in U : \varphi(u) \in V\}$ podprostorem U. Dokažte.

Lineární zobrazení

Definice

Lineárním zobrazením vektorových prostorů nad polem $\mathbb{K}$ rozumíme $\varphi : U \to V$, které $\forall a, b \in U, r \in \mathbb{K}$ splňuje:
$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ a
$\varphi(r \cdot a) = r \cdot \varphi(a)$.

Příklad 3

Dokažte, že jádro lineárního zobrazení $\varphi : U \to V$, tedy $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{u \in U : \varphi(u) = 0\}$ je vektorový podprostor U.
Obecněji, jsou-li A, resp. B podprostory U, resp. V a φ jako výše, je $\varphi(A)$ podprostorem U a $\varphi^{-1}(B) = \{u \in U : \varphi(u) \in V\}$ podprostorem U. Dokažte.

Lineární zobrazení

Příklad 4

Stanovte $\mathrm{Ker}(L)$ a $\mathrm{Im}(L)$ lineárního zobrazení $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ zadaného vztahem
$L(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3)$

Příklad 5

Jaká lineární zobrazení $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (tj. transformace $\mathbb{R}^2$) jsou reprezentována maticemi
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$
$D \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$
ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^2$?

Lineární zobrazení

Příklad 4

Stanovte $\mathrm{Ker}(L)$ a $\mathrm{Im}(L)$ lineárního zobrazení $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ zadaného vztahem
$L(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3)$

Příklad 5

Jaká lineární zobrazení $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (tj. transformace $\mathbb{R}^2$) jsou reprezentována maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^2$?

Lineární zobrazení

Příklad 6

Nechť jsou v prostoru polynomů P_3 dány báze $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3), \mathcal{B} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$ Nalezněte matice přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{B}$ a od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{E}$.

Příklad 7

Napište souřadnice vektoru $5x^3 + 3x^2 - x + 3$ v bázi $\mathcal{B}$ prostoru P_3 z předchozího příkladu.

Lineární zobrazení

Příklad 6

Nechť jsou v prostoru polynomů P_3 dány báze $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3), \mathcal{B} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$ Nalezněte matice přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{B}$ a od báze $\mathcal{B}$ k bázi $\mathcal{E}$.

Příklad 7

Napište souřadnice vektoru $5x^3 + 3x^2 - x + 3$ v bázi $\mathcal{B}$ prostoru P_3 z předchozího příkladu.

Lineární zobrazení

Příklad 8

O lineárním zobrazení derivace $D : P_3 \to P_2$ víme, že $D(1) = 0, D(x) = 1, D(x^2) = 2x, D(x^3) = 3x^2$. Určete matici zobrazení D
(a) ve standardních bázích prostorů P_3 a P_2, tj. v bázích $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3), \mathcal{E} = (1, x, x^2)$,
(b) v bázích $\mathcal{U} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$ prostoru P_3 a $\mathcal{V} = (1 + x, 1 - x, x + x^2)$ prostoru P_2.