

MB101 Matematika I - 12. demonstrované cvičení

Jan Herman

May 5, 2009

Obsah

- 1 Lineární zobrazení a souřadnice - zbylo z minula
- 2 Vlastní hodnoty a vektory, charakteristický polynom

Lineární zobrazení

Příklad 1

Nechť jsou v prostoru polynomů P_3 dána báze $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$, $\mathcal{B} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$. Napište souřadnice vektoru $5x^3 + 3x^2 - x + 3$ v bázích \mathcal{B} a \mathcal{E} .

Lineární zobrazení

Příklad 2

O lineárním zobrazení derivace $D : P_3 \rightarrow P_2$ víme, že $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$, $D(x^3) = 3x^2$. Určete matici zobrazení D

(a) ve standardních bázích prostorů P_3 a P_2 , tj. v bázích $\mathcal{E} = (1, x, x^2, x^3)$, $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$,

(b) v bázích $\mathcal{U} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$ prostoru P_3 a $\mathcal{V} = (1 + x, 1 - x, x + x^2)$ prostoru P_2 .

Vlastní hodnoty a vektory

Příklad 3

Určete charakteristický polynom, vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4

Stanovte vlastní hodnoty matice

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnoty a vektory

Příklad 3

Určete charakteristický polynom, vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4

Stanovte vlastní hodnoty matice

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Algebraická a geometrická násobnost

Příklad 5

Udejte příklad čtyřrozměrné matice s vlastními hodnotami $\lambda_1 = 6$ a $\lambda_2 = 7$ takové, aby algebraická násobnost λ_2 byla 3 a aby

- (a) geometrická násobnost λ_2 byla 3 (tj. $\dim \text{Eigen}(7) = 3$),
- (b) geometrická násobnost λ_2 byla 2 (tj. $\dim \text{Eigen}(7) = 2$),
- (c) geometrická násobnost λ_2 byla 1 (tj. $\dim \text{Eigen}(7) = 1$).

Vlastní hodnoty

Příklad 6

Víte-li, že čísla 1, -1 jsou vlastní hodnoty matice

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -21 & 11 & 8 & 2 \\ -9 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

uveďte všechna řešení rovnice $p(\lambda) := |A - \lambda I| = 0$.

Nápověda: Označíme-li kořeny polynomu $p(\lambda)$ jako

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, je $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4$, $\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$.