Matematika I
Demonstrační cvičení
24. února 2009

Kombinatorika
Pravděpodobnost

1. Kombinatorika

př. 1

Určete počet všech 4 – ciferných přirozených čísel dělitelných čtyřmi, která jsou sestavena pouze z číslic 1, 2, 3, 4, 5.

		5	2
		4	4
		3	2
		2	4
		1	2
___	___	___	___

počet možností: 5 . 5 . 5 = 125

1. Kombinatorika

př. 2

Určete počet možností, jak se může 6 hochů posadit na 6-ti místnou lavici.

počet možností: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$

1. Kombinatorika

... tak, aby Jarda seděl na kraji, Marek a Honza vedle sebe.

a) _J_ __ __ __ __ __

zůstává 5 chlapců – 3 samostatní, Marek + Honza → 4 objekty do řady … 4!

Marek a Honza: M H nebo H M … 2 možnosti … 2 . 4! = 48

b) __ __ __ __ __ _J_

opět 48 možností

celkem: 48 + 48 = 96

1. Kombinatorika

př. 3

Kolika způsoby lze na šachovnici 8 x 8 vybrat trojici políček tak, aby neležela ani v jedné řadě ani v jednom sloupci.

pozn.: 2 políčka v jedné řadě (či v jednom sloupci) a 3. políčko jinde … OK ☺

všech možností: vybíráme 3 políčka ze 64, nezáleží na pořadí $\binom{64}{3}$

nevyhovující možnosti:

v jedné řadě $8 \cdot \binom{8}{3}$ v jednom sloupci $8 \cdot \binom{8}{3}$

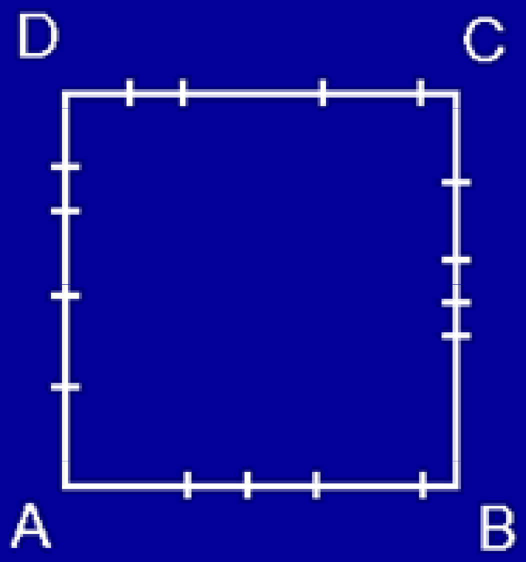
celkem: $\binom{64}{3} - 16\binom{8}{3} = 407$

1. Kombinatorika

př. 4

Je dán čtverec ABCD a na každé jeho straně n (n = 3, 4, 5, …) vnitřních bodů.

Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.



všech trojic $\binom{4n}{3}$

placaté trojúhelníky $4 \cdot \binom{n}{3}$

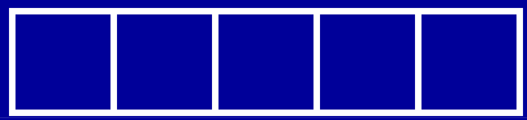
celkem: $\binom{4n}{3} - 4\binom{n}{3}$

pro n = 5 … 1 100 trojúhelníků

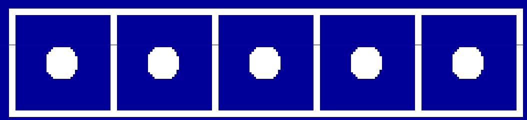
1. Kombinatorika

př. 5

Kolika způsoby lze do 5 <u>různých</u> přihrádek rozmístit 7 <u>stejných</u> kuliček tak, aby žádná přihrádka nebyla prázdná?



do každé přihrádky dáme po 1 kuličce … 1 možnost (kuličky jsou stejné)



zbylé 2 kuličky dáme do:

stejné přihrádky … 5 možností

dvou různých přihrádek … $\binom{5}{2} = 10$

celkem: 1. (5 + 10) = 15

1. Kombinatorika

př. 6

Dokažte, že alespoň dva obyvatelé městečka s 1500 obyvateli mají stejné iniciály (k dispozici 32 písmen).

$$\underline{} \quad \underline{}$$

$$32 \;.\; 32 \;=\; 1\,024$$

Lidí je tedy více než možných iniciálů ⇨ alespoň dva lidé musejí mít iniciály stejné (to dá rozum ☺).

tzv. Dirichletův princip

1. Kombinatorika

př. 7

Určete počet všech řešení rovnice $a + b + c + d = 9$ v oboru $\mathbf{N_o}$.

např. 1 + 5 + 0 + 3 = 9

řešení lze přepsat jako posloupnost obrázků: | + | | | | | + + | | |

počet řešení = počet obrázků ... $\binom{12}{3} = 220$

stejné zadání v oboru **N**

každému číslu a, b, c, d dáme po jedničce ⇨ rozdělujeme pouze „5 čárek“

$\binom{8}{3} = 56$

1. Kombinatorika

př. 8

Kolika způsoby lze ze tří beden kuliček (1. bedna zelené, 2. bedna modré, 3. bedna červené kuličky) vybrat hrst 5 kuliček, je–li všech kuliček dostatečný počet.

vybíráme 3 kuličky z 5 hromádek, nezáleží na pořadí, každou hromádku můžeme vybrat opakovaně ⇨ kombinace s opakováním

$$K'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} \qquad K'_5(3) = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$$

v první bedně jsou pouze 4 zelené kuličky

není možné vybrat hrst 5 zelených kuliček (to je 1 možnost):   21 – 1 = 20

1. Kombinatorika

př. 9

Kolik existuje různých trojúhelníků (na pořadí stran nezáleží), kde každá strana může mít délku 5, 6, 7 nebo 8 cm?

vybíráme 3 délky ze 4, na pořadí nezáleží, výběry se mohou opakovat

(→ rovnoramenné a rovnostranné trojúhelníky) ⇨ kombinace s opakováním

$$K'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} \qquad K'_3(4) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3}$$

1. Kombinatorika

př. 10

Kolika způsoby lze do 3 <u>různých</u> regálů poskládat 7 <u>různých</u> knih (záleží na pořadí knih v jednotlivých regálech).

do jednoho velkého regálu skládáme do řady 7 různých knih a 2 stejné přepážky (celkem 9 objektů, z nichž 2 jsou stejné)

$$\frac{9!}{2!} = 181\,440$$

1. Kombinatorika

př. 11

Kolika způsoby lze 3 dětem rozdat 7 různých (resp. stejných) plyšáků?

→ různých

u každého plyšáka máme 3 možnosti, komu ho dát

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7 = 2\,187$$

→ stejných

„metoda kamínků“ ✈✈✈✈ • ✈ • ✈✈

do řady skládáme 9 objektů, z nichž 7 je stejných a 2 jsou stejné

$$\frac{9!}{7!\cdot 2!} = 36$$

2. Pravděpodobnost

př. 12

Házíme dvěma mincemi. Určete pravděpodobnost, že

a) nepadne žádný líc   b) padne právě 1 líc   c) padne aspoň 1 rub

R R   R L   L L

L R

mince rozlišujeme (i když jsou stejné)!!!

jsou-li všechny možnosti stejně pravděpodobné:

př. 12

Házíme dvěma mincemi. Určete pravděpodobnost, že

a) nepadne žádný líc b) padne právě 1 líc c) padne aspoň 1 rub

$P(A)=\frac{1}{4}$ $P(B)=\frac{2}{4}$ $P(C)=\frac{3}{4}$

R R R L L L

L R

2. Pravděpodobnost

př. 13

Házíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost, že

a) padne 6 a 3

všech možností: 6 . 6 = 36

příznivých možností: 6 , 3 nebo 3 , 6 ... 2 možnosti

$$P(A) = \frac{2}{36}$$

b) padne součet 7

všech možností: 6 . 6 = 36

příznivých možností: 1 , 6   6 , 1   2 , 5   5 , 2   3 , 4   4 , 3 ... 6 možností

$$P(B) = \frac{6}{36}$$

2. Pravděpodobnost

př. 13

Házíme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost, že

c) na jedné kostce padne 6

všech možností: 6 . 6 = 36

příznivé možnosti: 6 , 1   6 , 2   6 , 3   6 , 4   6 , 5

1 , 6   2 , 6   3 , 6   4 , 6   5 , 6   ... 10 možností

$$P(A) = \frac{10}{36}$$

2. Pravděpodobnost

př. 14

Ve Sportce se táhne 6 čísel ze 49 (bez ohledu na pořadí). Tipujeme 6 čísel.

Jaká je pravděpodobnost, že se strefíme právě do 3 čísel?

všech možností: 6 čísel ze 49 $\binom{49}{6}$

příznivé možnosti: 3 čísla ze 6 tažených a 3 ze zbylých 43 $\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}$

celkem: $P(A)=\dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}\doteq 1{,}76\,\%$

2. Pravděpodobnost

př. 15

Ze 40 studentů vybíráme 10-ti členné družstvo. Jaká je pravděpodobnost, že v družstvu bude Petr a Michal?

všech možností: ze 40 vybíráme 10 $\binom{40}{10}$

příznivé možnosti: k Petrovi a Michalovi vybereme ještě 8 ze zbylých 38 $\binom{38}{8}$

celkem: $$P(A) = \frac{\binom{38}{8}}{\binom{40}{10}} = \frac{9}{156} \doteq 5{,}77\,\%$$

2. Pravděpodobnost

př. 16

Ve velké tombole je 200 losů, táhne se 10 (tažený = výherní ☺). Jaká je pravděpodobnost, že vyhrajeme aspoň jednu výhru, jestliže jsme si koupili 20 losů?

vypočteme pravděpodobnost, že nevyhrajeme nic (mnohem jednodušší) ... A'

všech možností: táhne se 10 losů z 200 $\binom{200}{10}$

příznivé možnosti: těch 10 losů se musí vytáhnout ze 180, které nemáme $\binom{180}{10}$

$$P(A') = \frac{\binom{180}{10}}{\binom{200}{10}} \doteq 34\,\%$$

2. Pravděpodobnost

př. 17

Při zkoušce se tahají 3 otázky z 20. Jaká je pravděpodobnost, že si Adam vytáhne stejné tři otázky jako Maruška minulý týden?

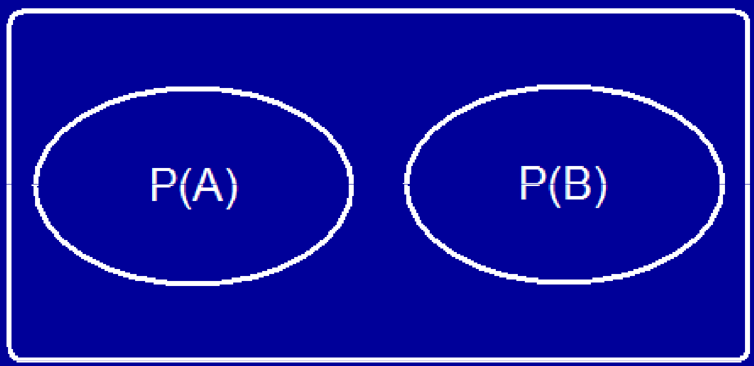
všech možností: Maruška táhne 3 z 20, pak Adam 3 z 20 $\binom{20}{3}\cdot\binom{20}{3}$

příznivé možnosti: Maruška táhne 3 z 20 a Adam to samé $\binom{20}{3}\cdot 1$

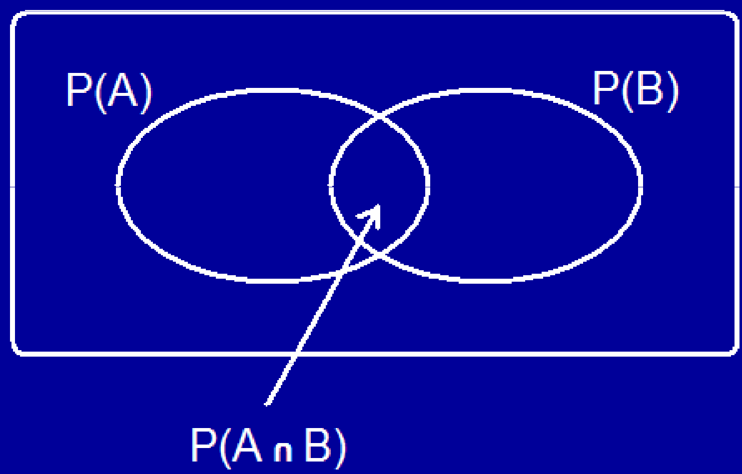
celkem: $$P(A) = \frac{\binom{20}{3}\cdot 1}{\binom{20}{3}\cdot\binom{20}{3}} = \frac{1}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{1140} \doteq 0{,}08\,\%$$

Sčítání pravděpodobností („nebo“)

A, B se vylučují



A, B se nevylučují



2. Pravděpodobnost – sčítání pravděpodobností („nebo“)

př. 18

Házíme 3 mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že padne 1 nebo 2 líce.

A ... padne 1 líce B ... padnou 2 líce vylučující se možnosti

P(A) ... líc padne na jedné ze 3 mincí (na ostatních je rub) → 3 možnosti

$$P(A)=\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$$

P(B) ... líc padne na dvou ze tří mincí → 3 možnosti

$$P(B)=\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}$$

celkem:

$$P=P(A)+P(B)=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

2. Pravděpodobnost – sčítání pravděpodobností („nebo“)

př. 19

Z 10 členů městského zastupitelstva vybíráme 3-člennou komisi. Jaká je pravděpodobnost, že tam bude pan Adámek nebo pan Bouda ?

A ... v komisi pan Adámek B ... v komisi pan Bouda jevy se **<u>ne</u>**vylučují

$$P(A)=\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{10} \qquad P(B)=\frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{10} \qquad P(AB)=\frac{\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{15}$$

[illegible]

[illegible]

2. Pravděpodobnost – sčítání pravděpodobností („nebo“)

př. 20

Hodíme bílou a černou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 7 nebo na bílé padne 4?

A ... součet 7

č	b
1	6
6	1
2	5
5	2
3	4
4	3

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

B ... na bílé 4

č	b
1	4
2	4
3	4
4	4
5	4
6	4

$$P(B) = \frac{6}{36}$$

jevy se **<u>ne</u>**vylučují

č	b
3	4

[illegible]

[illegible]

Násobení pravděpodobností („a“)

A, B nezávislé

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

2. Pravděpodobnost – násobení pravděpodobností („a“)

př. 21

K tomu, aby student „prošel“ prvním semestrem, je nutné, aby zvládl zkoušky ze tří předmětů (všechny tři). První předmět zvládne s pravděpodobností 80%, druhý s 90% a třetí s 95%. S jakou pravděpodobností projde 1. semestrem? (Předpokládejme nezávislost jevů.)

A ... zvládne 1. předmět B ... zvládne 2. předmět C ... zvládne 3. předmět

$P(A)=0,8$ $P(B)=0,9$ $P(C)=0,95$

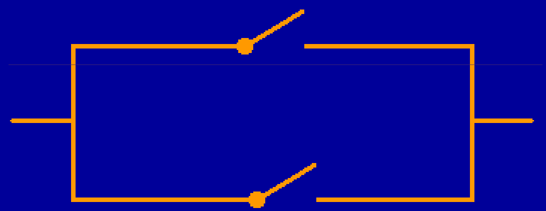
[illegible]

[illegible]

2. Pravděpodobnost – násobení pravděpodobností („a“)

př. 22

Na obrázku je znázorněna část elektrického obvodu se dvěma vypínači (každý z nich je zapnut s pravděpodobností 80% nezávisle na druhém vypínači). S jakou pravděpodobností prochází touto částí obvodu proud?



vypočteme pravděpodobnost, s jakou proud neprochází (jednodušší)

A ... proud neprochází horní větví

B ... proud neprochází dolní větví

[illegible]

[illegible]

proud neprochází ... [illegible]

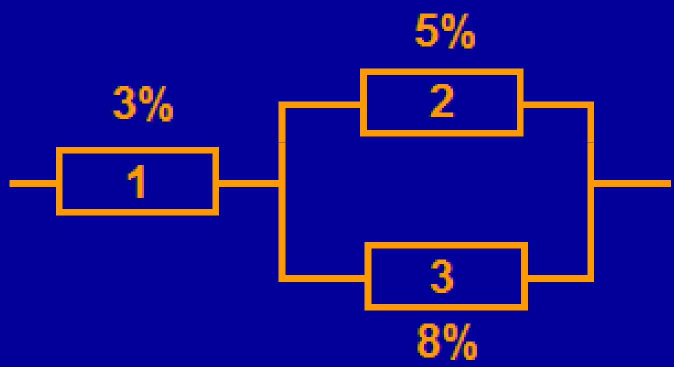
proud prochází ... [illegible]

2. Pravděpodobnost – násobení pravděpodobností („a“)

př. 23

S jakou pravděpodobností projde částí elektrického obvodu proud?

(Jsou dány pravděpodobnosti, s jakou se daná součástka porouchá).



musí fungovat oba bloky (I. blok = součástka č.1, II. blok = součástky 2 a 3)

A ... funguje I. blok B ... funguje II. blok

Podmíněná pravděpodobnost

A ... sledovaný jev

B ... podmínka

$P(A$

2. Pravděpodobnost – podmíněná pravděpodobnost

př. 24

Házíme dvěma kostkami (černá, bílá). Jaká je pravděpodobnost, že na bílé kostce padla pětka, víme-li, že padl součet 9?

A ... na bílé 5 B ... součet 9 (podmínka, „už se stalo“)

$$P(A) = \frac{1}{36}$$

č	b
4	5

$$P(B) = \frac{4}{36}$$

č	b
3	6
6	3
4	5
5	4

$$P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}$$

2. Pravděpodobnost – podmíněná pravděpodobnost

př. 25

Dva lukostřelci (Adam a Martin) střílí na terč. Adam se trefí s pravděpodobností 60%, Martin s pravděpodobností 90%. Každý vystřelil jedenkrát, v terči zůstal jeden šíp. S jakou pravděpodobností byl od Adama? (Nejprve odhadněte! ☺)

A ... Adam se trefil do terče B ... v terči byl jeden šíp

[illegible] ... Adam ano, Martin ne

[illegible] ... Adam ano, Martin ne nebo

Adam ne, Martin ano

[illegible]