Matematika I – 10. přednáška
Ortogonální množiny a prostory, základy analytické geometrie

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

22. 4. 2009

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).

Plán přednášky

1. Ortogonální podmnožiny a podprostory
   - Ortogonální matice
   - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces
2. Analytická geometrie
   - Afinní geometrie
   - Základní afinní úlohy
   - Euklidovská geometrie
   - Základní úlohy euklidovské geometrie

Ortogonální matice

Definice

Čtvercová matice Q řádu n je **ortogonální** matice, pokud její sloupce tvoří ortonormální množinu vektorů v $\mathbb{R}^n$, tj. pokud platí

$$Q^T Q = I, \quad \text{tj.} \quad Q^{-1} = Q^T.$$

Ortogonální matice

Definice

Čtvercová matice Q řádu n je **ortogonální** matice, pokud její sloupce tvoří ortonormální množinu vektorů v $\mathbb{R}^n$, tj. pokud platí

$$Q^T Q = I, \quad \text{tj.} \quad Q^{-1} = Q^T.$$

Poznámka

Ze vztahu $Q^T Q = I$ plyne, že každá ortogonální matice je regulární a že determinant každé ortogonální matice je buď 1 nebo -1, neboť

$$1 = |I| = |Q^T Q| = |Q^T| . |Q| = |Q|^2.$$

Příklad

(a) Matice rotace v $\mathbb{R}^2$ o úhel φ v kladném směru

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice a tedy platí

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Příklad

(a) Matice rotace v $\mathbb{R}^2$ o úhel φ v kladném směru

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice a tedy platí

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(b) Tzv. **permutační matice** jsou ortogonální, např.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Permutační matice vzniknou z jednotkové matice I tak, že se přeházou její řádky (nebo sloupce).

Věta

Je-li Q ortogonální matice řádu n, potom platí

$$\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \textit{pro všechny vektory } x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \textit{pro všechny vektory } x \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz.

Plyne snadno z předchozích tvrzení. $\square$

Věta

Je-li Q ortogonální matice řádu n, potom platí

$$\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \textit{pro všechny vektory } x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \textit{pro všechny vektory } x \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz.

Plyne snadno z předchozích tvrzení. □

Poznámka

Z předchozího plyne jako velmi speciální případ intuitivně zřejmé tvrzení, že rotací v $\mathbb{R}^2$ se nemění délka vektorů.

Projekce vektoru na podprostor

Věta

Nechť W je podprostor vektorového prostoru V a nechť je dán vektor $v \in V$. Je-li $\underline{u} = (u_1, \dots, u_k)$ ortonormální báze podprostoru W, potom má vektor $p \in W$, který je nejblíže k vektoru v, tvar

$$p = a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k, \quad kde \quad a_i = \langle v, u_i \rangle, \ i = 1, \dots, k.$$

Platí tedy, že

$$[p]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_k \rangle \end{pmatrix}.$$

Důkaz.

Protože je $V = W \oplus W^{\perp}$, můžeme vektor v napsat jediným způsobem jako součet

$$v = p + w, \quad \text{kde } p \in W, \; w \in W^{\perp}.$$

Protože jsou bázové vektory $u_i \in W$, je $u_i \perp w$, tj. $\langle u_i, w \rangle = 0$ $\forall i = 1, \ldots, k$.

Důkaz.

Protože je $V = W \oplus W^{\perp}$, můžeme vektor v napsat jediným způsobem jako součet

$$v = p + w, \quad \text{kde } p \in W, \; w \in W^{\perp}.$$

Protože jsou bázové vektory $u_i \in W$, je $u_i \perp w$, tj. $\langle u_i, w \rangle = 0$ $\forall i = 1, \dots, k$.
Na druhou stranu, vektor $p \in W$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů $u_1, \dots, u_k$, tj.

$$p = a_1 \, u_1 + \cdots + a_k \, u_k,$$

odkud již plyne vztah

$$\langle v, u_i \rangle = \langle p, u_i \rangle + \underbrace{\langle w, u_i \rangle}_{=0} = a_1 \langle u_1, u_i \rangle + \cdots + a_k \langle u_k, u_i \rangle$$

$$= a_i \langle u_i, u_i \rangle = a_i \, \|u_i\|^2 = a_i \qquad \forall i = 1, \dots, k.$$

Poznámka

Z důkazu plyne, že pokud by báze podprostoru W nebyla ortonormální, ale jen **ortogonální** , potom pro koeficienty a_i ve vyjádření projekce p platí

$$a_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\| u_i \|^2}.$$

Tedy projekce p vektoru v na podprostor W je pak tvaru

$$p = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \cdot u_k.$$

Vzdálenost a odchylka vektoru od podprostoru

Definice

Číslo $v(v, W) := \|v - p\|$ nazýváme **vzdálenost** vektoru v od podprostoru W. **Odchylka** vektoru v od podprostoru W je definována jako úhel, který svírá vektor v se svou projekcí p na podprostor W, tj. je to úhel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pro který je

$$\cos \varphi = \frac{\|p\|}{\|v\|}.$$

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

V předchozím jsme viděli, že pro nalezení projekce daného vektoru v na podprostor W potřebujeme znát ortonormální bázi podprostoru W. V tomto odstavci si ukážeme, jak z **libovolné** báze podprostoru W zkonstruovat bázi ortogonální (a poté bázi ortonormální). Tento proces se nazývá **Gram-Schmidtův ortogonalizační proces**.

Pro popis tohoto ortogonalizačního procesu není zřejmě potřeba se omezovat na báze a podprostor W, ale můžeme uvažovat libovolnou množinu lineárně nezávislých vektorů v prostoru V.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

V předchozím jsme viděli, že pro nalezení projekce daného vektoru v na podprostor W potřebujeme znát ortonormální bázi podprostoru W. V tomto odstavci si ukážeme, jak z **libovolné** báze podprostoru W zkonstruovat bázi ortogonální (a poté bázi ortonormální). Tento proces se nazývá **Gram-Schmidtův ortogonalizační proces**.

Pro popis tohoto ortogonalizačního procesu není zřejmě potřeba se omezovat na báze a podprostor W, ale můžeme uvažovat libovolnou množinu lineárně nezávislých vektorů v prostoru V.

Nechť jsou tedy dány lineárně nezávislé vektory $u_1, \dots, u_n \in V$.

V první fázi najdeme **ortogonální** množinu vektorů $v_1, \dots, v_n$ takovou, že

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_n \rangle,$$

tj. ortogonální vektory $v_1, \dots, v_n$ generují stejný podprostor jako původní vektory $u_1, \dots, u_n$.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

1. Položme $\boxed{v_1 := u_1}$, tj. první vektor se nemění.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

1. Položme $\boxed{v_1 := u_1}$, tj. první vektor se nemění.
2. Najděme projekci p_1 vektoru u_2 na podprostor $W := \langle v_1 \rangle$. Podle předchozího je

$$p_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 .$$

Potom vektor

$$\boxed{v_2 := u_2 - p_1} = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1$$

splňuje podmínky $v_2 \perp v_1$ a $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

k. Pokud již máme zkonstruovány ortogonální vektory $v_1, \dots, v_k$ takové, že

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle,$$

pak najděme projekci p_k vektoru u_{k+1} na podprostor $W := \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Tou je

$$p_k = \frac{\langle u_{k+1}, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 + \dots + \frac{\langle u_{k+1}, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} \cdot v_k.$$

Potom je vektor

$$\boxed{v_{k+1} := u_{k+1} - p_k} = u_{k+1} - \frac{\langle u_{k+1}, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 - \dots - \frac{\langle u_{k+1}, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} \cdot v_k$$

kolmý na všechny předchozí vektory $v_1, \dots, v_k$ a splňuje podmínku

$$\langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k+1} \rangle.$$

Příklad

Určete ortonormální bázi podprostoru $W = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$, přičemž

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a následně projekci vektoru

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

na podprostor W, vzdálenost vektoru v od podprostoru W a odchylku vektoru v od podprostoru W.

Plán přednášky

1. Ortogonální podmnožiny a podprostory
   - Ortogonální matice
   - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces
2. Analytická geometrie
   - Afinní geometrie
   - Základní afinní úlohy
   - Euklidovská geometrie
   - Základní úlohy euklidovské geometrie

Afinní geometrie

Vrátíme se teď k úlohám elementární geometrie z podobného pohledu, jako když jsme zkoumali polohy bodů v rovině.

Definice (Afinní prostor)

Standarní afinní prostor $\mathcal{A}_n$ je množina všech bodů v $\mathbb{R}^n$ spolu s operací, kterou k bodu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ a vektoru $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadíme bod $A + v = (a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$. Tyto operace splňují následující tři vlastnosti:

1. $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in P$ a nulový vektor $0 \in V$
2. $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$, $A \in P$
3. pro každé dva body $A, B \in P$ existuje právě jeden vektor $v \in P$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $B - A$, někdy také $\vec{AB}$.

Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ nazýváme **zaměření afinního prostoru** $\mathcal{A}_n$.

Proč vlastně chceme rozlišovat množinu bodů prostoru $\mathcal{A}_n$ od jeho zaměření V, když se jedná jakoby o stejné $\mathbb{R}^n$? Je to patrně podstatný formální krůček pro pochopení geometrie v $\mathbb{R}^n$: Geometrické objekty jako jsou přímky, body, roviny apod. nejsou totiž přímo závislé na vektorové struktuře na množině $\mathbb{R}^n$ a už vůbec ne na tom, že pracujeme s n–ticemi skalárů. Musíme ale mít možnost říci, co je to rovně v daném směru. K tomu právě potřebujeme na jedné straně vnímat třeba rovinu jako neohraničenou desku bez zvolených souřadnic, ale s možností posunout se o zadaný vektor. Když přejdeme navíc k takovému abstraktnímu pohledu, budeme umět diskutovat rovinnou geometrii pro dvourozměrné podprostory, tj. roviny ve vícerozměrných prostorech, prostorovou pro třírozměrné atd., aniž bychom museli přímo manipulovat k-ticemi souřadnic.

Definice

Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se zaměřením V rozumíme množinu **bodů** P, spolu se zobrazením $P \times V \to P$, $(A, v) \mapsto A + v$, splňující vlastnosti (1)–(3). Pro libovolný pevně zvolený vektor $v \in V$ je tak definována **translace** $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jako zúžené zobrazení

$$\tau_v : P \simeq P \times \{v\} \to P, \quad A \mapsto A + v.$$

Dimenzí afinního prostoru $\mathcal{A}$ rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Všimněme si, že volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}$ nám určuje bijekci mezi V a $\mathcal{A}$. Při volbě pevné báze $\underline{u}$ ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic** $(A_0; u_1, \dots, u_n)$ zadané **počátkem afinní souřadné soustavy** A_0 a bazí zaměření $\underline{u}$.

Afinní podprostory

Jestliže si vybereme v $\mathcal{A}$ jen body, které budou mít některé předem vybrané souřadnice nulové (třeba poslední jednu), dostaneme opět množinu, která se bude chovat jako afinní prostor. Takto budeme skutečně parametricky popisovat tzv. afinní podprostory ve smyslu následující definice.

Definice

Neprázdná podmnožina $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ se zaměřením V se nazývá **afinní podprostor** v $\mathcal{A}$, je-li podmnožina $W = \{B - A; A, B \in \mathcal{Q}\} \subset V$ vektorovým podprostorem a pro libovolné $A \in \mathcal{Q}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{Q}$.

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \langle \{B - A; B, A \in M\} \rangle \subset V.$$

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \langle \{B - A; B, A \in M\} \rangle \subset V.$$

Přímo z definic je zřejmé, že průnik libovolné množiny afinních podprostorů je buď opět afinní podprostor nebo prázdná množina. Afinní podprostor $\langle M \rangle$ v $\mathcal{A}$ *generovaný* neprázdnou podmnožinou $M \subset \mathcal{A}$ je průnikem všech afinních podprostorů, které obsahují všechny body podmnožiny M.
Přímo z definic plyne, že pro kterýkoliv bod $A_0 \in M$ je $\langle M \rangle = \{A_0 + v; v \in Z(M) \subset Z(\mathcal{A})\}$, tj. pro generování afinního podprostoru vezmeme vektorový podprostor $Z(M)$ v zaměření generovaný všemi rozdíly bodů z M a ten pak přičteme k libovolnému z nich. Hovoříme také o **afinním obalu** množiny bodů M v $\mathcal{A}$.

Parametrizace podprostorů

Naopak, kdykoliv zvolíme podprostor U v zaměření $Z(\mathcal{A})$ a jeden pevný bod $A \in \mathcal{A}$, pak podmnožina $A + U$ vzniklá všemi možnými součty bodů A s vektory v U je afinní podprostor. Takový postup vede k pojmu parametrizace podprostorů:
Nechť $\mathcal{Q} = A + Z(\mathcal{Q})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$ a $(u_1, \dots, u_k)$ je báze $Z(\mathcal{Q}) \subset \mathbb{R}^n$. Pak vyjádření podprostoru

$$\mathcal{Q} = \{A + t_1 u_1 + \cdots + t_k u_k; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme **parametrický popis** podprostoru $\mathcal{Q}$. Jeho zadání systémem rovnic v daných souřadnicích je **implicitní popis** podprostoru $\mathcal{Q}$.

Příklad

1. Jednorozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů reálné přímky $\mathcal{A}_1$. Její zaměření je jednorozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}$ (a nosná množina také $\mathbb{R}$). Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a měřítka (tj. báze ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}$). Všechny vlastní afinní podprostory jsou 0-rozměrné, jsou to právě všechny body reálné přímky R.

Příklad

1. Jednorozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů reálné přímky $\mathcal{A}_1$. Její zaměření je jednorozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}$ (a nosná množina také $\mathbb{R}$). Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a měřítka (tj. báze ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}$). Všechny vlastní afinní podprostory jsou 0-rozměrné, jsou to právě všechny body reálné přímky R.
2. Trojrozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru $\mathcal{A}_3$ se zaměřením $\mathbb{R}^3$. Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a tří nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body, přímky a roviny (0-rozměrné, 1-rozměrné a 2-rozměrné).

Příklad

1. Podprostor všech řešení jedné lineární rovnice $a \cdot x = b$ pro neznámý bod $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n$, známý nenulový vektor koeficientů $(a_1, \dots, a_n)$ a skalár $b \in \mathbb{R}$ je afinní podprostor dimenze $n - 1$, tj. tzv. **nadrovina v** A_n.

Příklad

1. Podprostor všech řešení jedné lineární rovnice $a \cdot x = b$ pro neznámý bod $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n$, známý nenulový vektor koeficientů $(a_1, \dots, a_n)$ a skalár $b \in \mathbb{R}$ je afinní podprostor dimenze $n - 1$, tj. tzv. **nadrovina v** A_n.

Poslední příklad je zvláštním případem následující obecné věty popisující geometrickou podstatu systémů lineárních rovnic.

Věta

Nechť $(A_0; \underline{u})$ je afinní souřadný systém v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$. Afinní podprostory dimenze k v $\mathcal{A}$, vyjádřené v daných souřadnicích, jsou právě množiny řešení řešitelných systémů $n - k$ lineárně nezávislých lineárních rovnic v n proměnných.

Transformace souřadnic

Dvě libovolně zvolené afinní soustavy souřadnic $(A_0, \underline{u})$, $(B_0, \underline{v})$ se obecně liší posunutím počátku o vektor $(B_0 - A_0)$ a jinou bazí zaměření. Transformační rovnice tedy vyčteme ze vztahu pro obecný bod $X \in \mathcal{A}$

$$X = B_0 + x'_1 v_1 + \cdots + x'_n v_n = B_0 + (A_0 - B_0) + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Označme $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ sloupec souřadnic vektoru $(A_0 - B_0)$ v bázi $\underline{v}$ a $M = (a_{ij})$ buď matice vyjadřující bázi $\underline{u}$ prostřednictvím báze $\underline{v}$. Potom

$$\begin{aligned} x'_1 &= y_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= y_n + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

tj. maticově

$$x' = y + M \cdot x.$$

Afinní kombinace bodů

Nechť $A_0, \dots, A_k$ jsou body v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Jejich afinní obal $\langle\{A_0 \dots, A_k\}\rangle$ můžeme zapsat jako

$$\{A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0); t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

a v libovolných afinních souřadnicích (tj. A_i je vyjádřen sloupcem skalárů) můžeme tutéž množinu zapsat jako

$$\langle A_0, \dots, A_k\rangle = \{t_0A_0 + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k; t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Obecně výrazy $t_0A_0 + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k$ s koeficienty splňujícícmi $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ rozumíme body $A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)$ a nazýváme je **afinní kombinace bodů**.

Afinní kombinace bodů

Nechť $A_0, \dots, A_k$ jsou body v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Jejich afinní obal $\langle\{A_0 \dots, A_k\}\rangle$ můžeme zapsat jako

$$\{A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \dots + t_k(A_k - A_0); t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

a v libovolných afinních souřadnicích (tj. A_i je vyjádřen sloupcem skalárů) můžeme tutéž množinu zapsat jako

$$\langle A_0, \dots, A_k\rangle = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k; t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Obecně výrazy $t_0 A_0 + t_1 A_1 + \dots + t_k A_k$ s koeficienty splňujícícmi $\sum_{i=0}^k t_i = 1$ rozumíme body $A_0 + \sum_{i=1}^k t_i(A_i - A_0)$ a nazýváme je **afinní kombinace bodů**.

Body $A_0 \dots, A_k$ jsou v **obecné poloze**, jestliže generují k-rozměný podprostor. Z našich definic je vidět, že to nastane právě, když pro kterýkoliv z nich platí, že vektory vzniklé pomocí rozdílů tohoto pevného s ostatními jsou lineárně nezávislé.

Simplex

Nechť $A_0, \dots, A_k$ je $k+1$ bodů afinního prostoru $\mathcal{A}$ v obecné poloze. k–rozměrný **simplex** $\Delta = \Delta(A_0, \dots, A_k)$ generovaný těmito body je definován jako množina všech afinních kombinací bodů A_i s pouze nezápornými koeficienty, tzn.

$$\Delta = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k ; t_i \in [0,1] \subset \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Jednorozměrný simplex je **úsečka**, dvourozměrný **trojúhelník**.

Simplex

Nechť $A_0, \dots, A_k$ je $k+1$ bodů afinního prostoru $\mathcal{A}$ v obecné poloze. k–rozměrný **simplex** $\Delta = \Delta(A_0, \dots, A_k)$ generovaný těmito body je definován jako množina všech afinních kombinací bodů A_i s pouze nezápornými koeficienty, tzn.

$$\Delta = \{t_0A_0 + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k;\, t_i \in [0,1] \subset \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Jednorozměrný simplex je **úsečka**, dvourozměrný **trojúhelník**. Zadání podprostoru jako množiny afinních kombinací bodů v obecné poloze je ekvivalentní parametrickému popisu. Obdobně pracujeme s parametrickými popisy simplexů.

Konvexní množiny

Definice

Podmnožina M afinního prostoru se nazývá **konvexní**, jestliže s každými svými dvěma body A, B obsahuje i celou úsečku $\Delta(A, B)$.

Přímo z definice je vidět, že každá konvexní množina obsahuje s každými $k + 1$ body v obecné poloze i celý jimi definovaný simplex.

Konvexní množiny

Definice

Podmnožina M afinního prostoru se nazývá **konvexní**, jestliže s každými svými dvěma body A, B obsahuje i celou úsečku $\Delta(A, B)$. Přímo z definice je vidět, že každá konvexní množina obsahuje s každými $k+1$ body v obecné poloze i celý jimi definovaný simplex.

Příklad

Konvexními množinami jsou např.
(1) prázdná podmnožina
(2) afinní podprostory
(3) úsečky, polopřímky $p = \{P + t \cdot v;\ t \geq 0\}$, obecněji k–rozměrné poloprostory
$\alpha = \{P + t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_k \cdot v_k;\ t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}, t_k \geq 0\}$, úhly v dvojrozměrných podprostorech
$\beta = \{P + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2;\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$, atd.

Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu M nazýváme **konvexní obal** $\mathcal{K}(M)$ množiny M.

Věta

Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1 A_1 + \cdots + t_s A_s;\ \sum_{i=1}^{s} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$$

Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu M nazýváme **konvexní obal** $\mathcal{K}(M)$ množiny M.

Věta

Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1 A_1 + \cdots + t_s A_s;\ \sum_{i=1}^{s} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$$

Konvexní obaly konečných množin bodů se nazývají **konvexní mnohostěny**. Jsou-li definující body $A_0, \dots, A_k$ konvexního mnohostěnu v obecné poloze, dostáváme právě k-rozměrný **simplex**. V případě simplexu je vyjádření jeho bodů ve tvaru afinní kombinace definujících vrcholů jednoznačné.

Jiným příkladem jsou konvexní podmnožiny generované jedním bodem a konečně mnoha vektory: Nechť $u_1, \dots, u_k$, jsou libovolné vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{A}_n$ je libovolný bod. *Rovnoběžnostěn* $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \dots + c_k u_k;\ 0 \le c_i \le 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ nezávislé, hovoříme o k-rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$. Z definice je zřejmé, že rovnoběžnostěny jsou konvexní. Ve skutečnosti jde o konvexní obaly jejich vrcholů.

K podprostoru zadanému implicitně nalézt parametrický popis

Nalezením partikulárního řešení nehomogenního systému a fundamentálního řešení zhomogenizovaného systému rovnic získáme (v souřadnicích, ve kterých byly rovnice zadány) právě hledaný parametrický popis.

K podprostoru zadanému implicitně nalézt parametrický popis

Nalezením partikulárního řešení nehomogenního systému a fundamentálního řešení zhomogenizovaného systému rovnic získáme (v souřadnicích, ve kterých byly rovnice zadány) právě hledaný parametrický popis.

Z parametrického popisu získat popis implicitní

Zapíšeme-li parametrický popis v souřadnicích, můžeme volné parametry $t_1, \dots, t_k$ vyeliminovat a získáme právě rovnice zadávající daný podprostor implicitně.

Nalézt podprostor generovaný několika podprostory

Výsledný podprostor $\mathcal{Q}$ je vždy určen jedním pevně zvoleným bodem A_i v každém z nich a součtem všech zaměření. Např.

$$\mathcal{Q} = A_1 + (Z(\{A_1, \dots, A_k\}) + Z(\mathcal{Q}_1) + \dots + Z(\mathcal{Q}_s)).$$

Pokud jsou podprostory zadány implicitně, je možné je nejdříve převést na parametrický tvar. V konkrétních situacích býají funkční i jiné postupy. Všimněme si, že obecně je skutečně nutné využít jednoho bodu z každého podprostoru. Např. dvě paralelní přímky v rovině vygenerují celou rovinu, ale sdílí totéž jednorozměrné zaměření.

Nalézt průnik podprostorů $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$

Pokud jsou zadány v implicitním tvaru, stačí sjednotit všechny rovnice do jednoho systému (a případně vynechat lineárně závislé). Pokud je vzniklý systém neřešitelný, je průnik prázdný. V opačném případě získáme implicitní popis afinního podprostoru, který je hledaným průnikem.
Pokud máme dány parametrické tvary, můžeme také hledat přímo společné body jako řešení vhodných rovnic, podobně jako při hledání průniků vektorových podprostorů. Získáme tak přímo opět parametrický popis. Pokud je podprostorů více než dva, musíme průnik hledat postupně.
Máme-li jeden prostor zadaný parametricky a ostatní implicitně, stačí dosadit parametrizované souřadnice a řešit výsledný systém rovnic.

Nalezení příčky mimoběžek p, q v $\mathcal{A}_3$ procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření)

Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběma mimoběžkami.

Nalezení příčky mimoběžek p, q v $\mathcal{A}_3$ procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření)

Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběma mimoběžkami.
Výsledná příčka r tedy bude jednorozměrným afinním podprostorem. Pokud máme zadán jeho bod $A \in r$, pak afinní podprostor generovaný p a A je buď přímka ($A \in p$) nebo rovina ($A \notin p$). V prvém případě máme nekonečně mnoho řešení, jedno pro každý bod z q, v druhém stačí najít průnik B roviny $\langle p \cup A \rangle$ s q a $r = \langle \{A, B\} \rangle$. Pokud je průnik prázdný, úloha nemá řešení, v případě že $q \subset \langle p \cup A \rangle$, máme opět nekonečně mnoho řešení, a pokud je průnik jednoprvkový, dostáváme právě jedno řešení.

Nalezení příčky mimoběžek p, q v $\mathcal{A}_3$ procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření)

Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběma mimoběžkami.
Výsledná příčka r tedy bude jednorozměrným afinním podprostorem. Pokud máme zadán jeho bod $A \in r$, pak afinní podprostor generovaný p a A je buď přímka ($A \in p$) nebo rovina ($A \notin p$). V prvém případě máme nekonečně mnoho řešení, jedno pro každý bod z q, v druhém stačí najít průnik B roviny $\langle p \cup A \rangle$ s q a $r = \langle \{A, B\} \rangle$. Pokud je průnik prázdný, úloha nemá řešení, v případě že $q \subset \langle p \cup A \rangle$, máme opět nekonečně mnoho řešení, a pokud je průnik jednoprvkový, dostáváme právě jedno řešení.
Máme-li místo bodu dán směr $u \in \mathbb{R}^n$, tj. zaměření r, pak uvažujeme opět podprostor $\mathcal{Q}$ generovaný p a zaměřením $Z(p) + \langle u \rangle \subset \mathbb{R}^n$. Opět, pokud $q \subset \mathcal{Q}$, máme nekonečně mnoho řešení, jinak uvážíme průnik $\mathcal{Q}$ s q a úlohu dokončíme stejně jako v předchozím případě.

Euklidovská geometrie

Definice

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y.$$

Euklidovská geometrie

Definice

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, y\rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$.

Euklidovská geometrie

Definice

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bazí $\underline{u}$.
Vzdálenost bodů $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$. **Euklidovské podprostory** v $\mathcal{E}_n$ jsou afinní podprostory jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny.

Připomeňme několik tvrzení o prostorech se skalárním součinem:

Věta

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**trojúhelníková nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*

Připomeňme několik tvrzení o prostorech se skalárním součinem:

Věta

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**trojúhelníková nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
2. $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$ (**Cauchyova nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*

Připomeňme několik tvrzení o prostorech se skalárním součinem:

Věta

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**trojúhelníková nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
2. $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$ (**Cauchyova nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
3. *pro každý ortonormální systém vektorů $(e_1, \ldots, e_k)$ platí* $\|u\|^2 \geq |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ (**Besselova nerovnost**).

Připomeňme několik tvrzení o prostorech se skalárním součinem:

Věta

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(***trojúhelníková nerovnost***). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
2. $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$ *(***Cauchyova nerovnost***). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
3. *pro každý ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ platí* $\|u\|^2 \geq |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ *(***Besselova nerovnost***).*
4. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ je* $u \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ *právě když* $\|u\|^2 = |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ *(***Parsevalova rovnost***).*

Připomeňme několik tvrzení o prostorech se skalárním součinem:

Věta

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(**trojúhelníková nerovnost**). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
2. $|u \cdot v| \leq \|u\|\,\|v\|$ *(**Cauchyova nerovnost**). Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
3. *pro každý ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ platí* $\|u\|^2 \geq |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ *(**Besselova nerovnost**).*
4. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ je* $u \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ *právě když* $\|u\|^2 = |u \cdot e_1|^2 + \cdots + |u \cdot e_k|^2$ *(**Parsevalova rovnost**).*
5. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ a $u \in V$ je* $w = (u \cdot e_1)e_1 + \cdots + (u \cdot e_k)e_k$ *jediným vektorem, který minimalizuje velikost $\|u - v\|$ pro všechny $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.*

Odtud dostáváme jednoduché geometrické důsledky:

Věta

1. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
2. $\rho(A, B) = 0$ *právě, když* $A = B$
3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$
4. *V každé kartézké souřadné soustavě* $(A_0; \underline{e})$ *mají body* $A = A_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad B = A_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$ *vzdálenost* $\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}$.
5. *Je–li dán bod* A *a podprostor* $\mathcal{Q}$ *v* $\mathcal{E}_n$, *pak existuje bod* $P \in \mathcal{Q}$ *minimalizující vzdálenosti bodů* $\mathcal{Q}$ *od* A. *Vzdálenost bodů* A *a* P *je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru* $A - B$ *do* $Z(\mathcal{Q})^\perp$ *pro libovolný* $B \in \mathcal{Q}$.
6. *Obecněji, pro podprostory* $\mathcal{R}$ *a* $\mathcal{Q}$ *v* $\mathcal{E}_n$ *existují bod* $P \in \mathcal{Q}$ *a* $Q \in \mathcal{R}$ *minimalizující vzdálenosti bodů* $B \in \mathcal{Q}$ *a* $A \in \mathcal{R}$. *Vzdálenost bodů* Q *a* P *je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru* $A - B$ *do* $Z(\mathcal{Q})^\perp$ *pro libovolné body* $B \in \mathcal{Q}$ *a* $A \in \mathcal{R}$.

Určení vzdálenosti podprostorů

Příklad

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$.

$$p: [1,-1,0]+t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: [2,5,-1]+t(-1,-2,1).$$

Určení vzdálenosti podprostorů

Příklad

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$.

$$p: \ [1,-1,0] + t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: \ [2,5,-1] + t(-1,-2,1).$$

Řešení

Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné příčky (spojnice) daných přímek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplňek zjistíme například pomocí vektorového součinu:

$$\langle(-1,2,3),(-1,-2,1)\rangle^{\perp} = \langle(-1,2,3)\times(-1,-2,1)\rangle = \langle(8,-2,4)\rangle.$$

Spojnicí daných přímek je například úsečka $[1,-1,0][2,5,-1]$, promítneme tedy vektor $[1,-1,0]-[2,5,-1]=(-1,-6,1)$. Pro vzdálenost přímek pak dostáváme:

$$\rho(p,q) = \frac{|(-1,-6,1)\cdot(4,-1,2)|}{\ldots} = \frac{4}{\ldots}$$

Odchylka podprostorů

Definice

Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V.
Odchylka podprostorů U_1, U_2 je reálné číslo $\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

1 Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u \rangle$, $U_2 = \langle v \rangle$, pak

$$\cos \alpha = \frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|}.$$

Odchylka podprostorů

Definice

Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V. **Odchylka podprostorů** U_1, U_2 je reálné číslo $\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

1. Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u \rangle$, $U_2 = \langle v \rangle$, pak

$$\cos\alpha = \frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|}.$$

2. Jsou-li dimenze U_1, U_2 kladné a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, pak je odchylka minimem všech odchylek jednorozměrných podprostorů

$$\alpha = \min\{\varphi(\langle u \rangle, \langle v \rangle); 0 \neq u \in U_1, 0 \neq v \in U_2\}.$$

Definice (pokr.)

3. Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Definice (pokr.)

3 Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

4 Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Definice (pokr.)

3 Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

4 Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Definice (pokr.)

3 Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

4 Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Všimněme si, že odchylka je vždy dobře definována, zejména v posledním případě je

$$(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}) \cap (U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}) = \{0\}$$

můžeme tedy opravdu odchylku určit podle bodu (2).