Matematika I – 11. přednáška
Vlastnosti lineárních zobrazení, vlastní hodnoty a vektory

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

29. 4. 2009

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).

Plán přednášky

Je-li A čtvercová matice řádu n, pak uvažujme lineární zobrazení $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je dáno maticí A. V tomto lineárním zobrazení nás zajímají *směry*, které toto zobrazení *preferuje* (zachovává), tj. zajímá nás, které vektory $u \in \mathbb{R}^n$ se zobrazí na svůj násobek. Číslo vyjadřující tento násobek pak můžeme chápat jako *přirozenou frekvenci* zobrazení L_A a příslušný vektor (nebo vektory) jako *přirozené směry* zobrazení L_A.

Je-li A čtvercová matice řádu n, pak uvažujme lineární zobrazení $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je dáno maticí A. V tomto lineárním zobrazení nás zajímají *směry*, které toto zobrazení *preferuje* (zachovává), tj. zajímá nás, které vektory $u \in \mathbb{R}^n$ se zobrazí na svůj násobek. Číslo vyjadřující tento násobek pak můžeme chápat jako *přirozenou frekvenci* zobrazení L_A a příslušný vektor (nebo vektory) jako *přirozené směry* zobrazení L_A.

V celé této přednášce budeme uvažovat pouze **čtvercové** matice řádu n. Navíc, i když budeme nuceni občas pracovat s komplexními čísly, prvky matice A budou vždy **reálné**.

Vlastní hodnoty (čísla) a vlastní vektory

Definice

Vlastní hodnota (též **vlastní číslo**) matice A je číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které existuje (alespoň jeden) **nenulový** vektor $u \in \mathbb{C}^n$ s vlastností

$$A \cdot u = \lambda \cdot u.$$

Vektor u se pak nazývá **vlastní vektor** (eigenvector) matice A příslušející vlastní hodnotě (eigenvalue) λ.
Množina všech vlastních vektorů příslušejících téže vlastní hodnotě λ (společně s nulovým vektorem) se nazývá **vlastní prostor** příslušející vlastní hodnotě λ a značíme ji $\mathrm{Eigen}(\lambda)$ (z angl./něm. *eigenspace*).

Vlastní hodnoty (čísla) a vlastní vektory

Definice

Vlastní hodnota (též **vlastní číslo**) matice A je číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které existuje (alespoň jeden) **nenulový** vektor $u \in \mathbb{C}^n$ s vlastností

$$A \cdot u = \lambda \cdot u.$$

Vektor u se pak nazývá **vlastní vektor** (eigenvector) matice A příslušející vlastní hodnotě (eigenvalue) λ.
Množina všech vlastních vektorů příslušejících téže vlastní hodnotě λ (společně s nulovým vektorem) se nazývá **vlastní prostor** příslušející vlastní hodnotě λ a značíme ji $\mathrm{Eigen}(\lambda)$ (z angl./něm. *eigenspace*).

Nulový vektor $u = 0$ vždy vyhovuje rovnici $A \cdot u = \lambda \cdot u$, a proto je v Definici požadavek na existenci nenulového vlastního vektoru.

Příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v, kde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot u,$$
$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot v.$$

Jsou tedy $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$ vlastní hodnoty matice A a jejich příslušné vlastní vektory jsou právě vektory u (pro $\lambda_1 = -1$) a v (pro $\lambda_2 = 2$).

Příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 3i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 3i \end{pmatrix}.$$

Příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix} = (-2+3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix},$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix} = (-2-3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

Příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix} = (-2+3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix},$$
$$A \cdot v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix} = (-2-3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

Jsou tedy $\lambda_1 = -2+3i$ a $\lambda_2 = -2-3i$ vlastní hodnoty matice A a jejich příslušné vlastní vektory jsou právě vektory u (pro $\lambda_1 = -2+3i$) a v (pro $\lambda_2 = -2-3i$).

Poznámka

Je-li u vlastní vektor matice A příslušející vlastní hodnotě λ, potom je také libovolný jeho (nenulový) násobek vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A\,(a\,u) = a\,(Au) = a\,(\lambda\,u) = \lambda\,(a\,u).$$

Poznámka

Je-li u vlastní vektor matice A příslušející vlastní hodnotě λ, potom je také libovolný jeho (nenulový) násobek vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A\,(a\,u) = a\,(Au) = a\,(\lambda\,u) = \lambda\,(a\,u).$$

Podobně, jsou-li u, v vlastní vektory matice A příslušející vlastní hodnotě λ, potom je také jejich součet vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A(u+v) = (Au) + (Av) = (\lambda\,u) + (\lambda\,v) = \lambda\,(u+v).$$

Vlastní vektory příslušející téže vlastní hodnotě tedy tvoří (společně s nulovým vektorem) **podprostor** vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. To také zdůvodňuje terminologii *vlastní prostor*.

Příklad

(a) Pro matici $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ z 1. příkladu je

$$\mathrm{Eigen}(-1) = \langle u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Eigen}(2) = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle.$$

Příklad

(a) Pro matici $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ z 1. příkladu je

$$\mathrm{Eigen}(-1) = \langle u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Eigen}(2) = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle.$$

(b) Pro matici $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$ z 2. příkladu je

$$\mathrm{Eigen}(-2+3i) = \langle u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\mathrm{Eigen}(-2-3i) = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix} \rangle.$$

Tvrzení

Je-li λ reálná vlastní hodnota matice A, potom jsou všechny příslušné vlastní vektory taktéž reálné.

Tvrzení

Je-li λ reálná vlastní hodnota matice A, potom jsou všechny příslušné vlastní vektory taktéž reálné.

Důkaz.

Protože je $\lambda \in \mathbb{R}$, má matice $A - \lambda I$ taktéž pouze reálné prvky. Tedy má homogenní systém $(A - \lambda I) \cdot u = 0$ reálná řešení, tj. vlastní vektory u jsou reálné.

$\square$

Z definičního vztahu plyne, že vlastní vektory jsou **nenulová** řešení homogenního systému

$$(A - \lambda I) \cdot u = A \cdot u - \lambda \cdot u = 0.$$

Z předchozího víme, že má-li mít taková soustava nenulové řešení, musí být matice

$$A - \lambda I$$

singulární, tj.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Matici $A - \lambda I$ dostaneme tedy tak, že v matici A odečteme od každého diagonálního prvku proměnnou λ (či číslo λ, pokud ho již jako vlastní hodnotu známe).

Příklad

Pro matici A z 1. příkladu máme

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-3-\lambda)(4-\lambda) - (-10) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Příklad

Pro matici A z 1. příkladu máme

$$|A-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -5 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}-3-\lambda & 2\\ -5 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$
$$= (-3-\lambda)(4-\lambda)-(-10) = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Pro matici A z 2. příkladu pak dostáváme

$$|A-\lambda I| = \left|\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -10 & -3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ -10 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)(-3-\lambda)-(-10) = \lambda^2+4\lambda+13.$$

V předchozích příkladech je vidět, že výraz $|A - \lambda I|$ je **polynom** v proměnné λ. Pro matici řádu n má tento polynom stupeň právě n. Výraz

$$p(\lambda) := |A - \lambda I|$$

se proto nazývá **charakteristický polynom** matice A a rovnice

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

se nazývá **charakteristická rovnice** matice A. A protože má každý polynom stupně n právě n kořenů (počítáno včetně násobností), platí tedy následující tvrzení.

Věta

Vlastní hodnoty matice A jsou právě kořeny charakteristického polynomu.

Příklad

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2,$$

a proto je $\lambda_1 = 2$ (násobnosti 2) jediná vlastní hodnota této matice.
Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 I \,|\, 0) = (A - 2I \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení (pokr.)

Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 I \,|\, 0) = (A - 2 I \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Volbou volné proměnné $x_1 = t$ dostaneme řešení $(t, 0) = t \cdot (1, 0)$, tj. vlastní vektor a příslušný vlastní prostor jsou

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Eigen}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Řešení (pokr.)

Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 I \,|\, 0) = (A - 2\, I \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Volbou volné proměnné $x_1 = t$ dostaneme řešení $(t, 0) = t \cdot (1, 0)$, tj. vlastní vektor a příslušný vlastní prostor jsou

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Eigen}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Definice

Algebraická násobnost vlastní hodnoty λ je definována jako násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu. **Geometrická násobnost** vlastní hodnoty λ je definována jako dimenze příslušného vlastního prostoru $\mathrm{Eigen}(\lambda)$.

Lze ukázat, že geometrická násobnost je vždy nejvýše rovna algebraické násobnosti, protože počet lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušejících téže vlastní hodnotě λ nemůže převýšit násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu. Např. v předchozím příkladu je geometrická násobnost vlastní hodnoty $\lambda = 2$ rovna $\dim \mathrm{Eigen}(2) = 1$, zatímco algebraická násobnost této vlastní hodnoty je 2. (V dalším uvidíme, že tyto dvě násobnosti jsou stejné právě když je matice A tzv. *diagonalizovatelná*.)

Lze ukázat, že geometrická násobnost je vždy nejvýše rovna algebraické násobnosti, protože počet lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušejících téže vlastní hodnotě λ nemůže převýšit násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu.
Např. v předchozím příkladu je geometrická násobnost vlastní hodnoty $\lambda = 2$ rovna $\dim \mathrm{Eigen}(2) = 1$, zatímco algebraická násobnost této vlastní hodnoty je 2. (V dalším uvidíme, že tyto dvě násobnosti jsou stejné právě když je matice A tzv. *diagonalizovatelná*.)
Na druhou stranu, má-li vlastní hodnota λ **(algebraickou) násobnost** 1 (tj. jedná se o jednoduchý kořen charakteristického polynomu), potom k ní přísluší (alespoň jeden) vlastní vektor $u \neq 0$. Je tedy geometrická násobnost této vlastní hodnoty alespoň 1. Ale protože, jak jsme výše uvedli, nemůže být geometrická násobnost větší než algebraická násobnost, plyne odsud, že v **tomto případě** jsou tyto dvě násobnosti **stejné** (obě jsou rovny 1).

Postup pro nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů matice A je tedy následující:

1. Najdeme kořeny charakteristického polynomu, tj. vyřešíme charakteristickou rovnici

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0.$$

Postup pro nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů matice A je tedy následující:

1. Najdeme kořeny charakteristického polynomu, tj. vyřešíme charakteristickou rovnici
$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0.$$
2. **Pro každou** vlastní hodnotu λ najdeme (bázi prostoru) řešení homogenního systému
$$(A - \lambda I) \cdot u = 0.$$
Z definice vlastní hodnoty musí tento systém mít netriviální řešení.

Postup pro nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů matice A je tedy následující:

1. Najdeme kořeny charakteristického polynomu, tj. vyřešíme charakteristickou rovnici
$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0.$$
2. **Pro každou** vlastní hodnotu λ najdeme (bázi prostoru) řešení homogenního systému
$$(A - \lambda I) \cdot u = 0.$$
Z definice vlastní hodnoty musí tento systém mít netriviální řešení.

Postup pro nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů matice A je tedy následující:

1. Najdeme kořeny charakteristického polynomu, tj. vyřešíme charakteristickou rovnici
$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0.$$
2. **Pro každou** vlastní hodnotu λ najdeme (bázi prostoru) řešení homogenního systému
$$(A - \lambda I) \cdot u = 0.$$
Z definice vlastní hodnoty musí tento systém mít netriviální řešení.

Příklad

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Struktura charakteristického polynomu

Protože je $p(\lambda) := |A - \lambda\, I|$ **polynom** stupně n, je tvaru

$$p(\lambda) = c_n\, \lambda^n + c_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + c_1\, \lambda + c_0.$$

Příklad

Pro matice řádu $n = 2$ je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \\ &= \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + ad - bc, \end{aligned}$$

tj. $c_2 = 1$, $c_1 = -(a+d)$, $c_0 = ad - bc$.

Struktura charakteristického polynomu

Protože je $p(\lambda) := |A - \lambda\, I|$ **polynom** stupně n, je tvaru

$$p(\lambda) = c_n\, \lambda^n + c_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + c_1\, \lambda + c_0.$$

Příklad

Pro matice řádu $n = 2$ je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + ad - bc,$$

tj. $c_2 = 1$, $c_1 = -(a+d)$, $c_0 = ad - bc$.

Odtud vidíme, že absolutní člen tohoto polynomu, tj. koeficient c_0, je $c_0 = p(0) = |A - 0\,.\,I| = |A|$.

Dále, koeficient c_n u nejvyšší mocniny dostaneme tak, že vynásobíme všechny koeficienty u proměnné λ, protože součin diagonálních prvků matice $A - \lambda I$ je zcela určitě jeden ze sčítanců v rozvoji determinantu $|A - \lambda I|$, tj.

$$c_n = (-1)^n.$$

Dále, koeficient c_n u nejvyšší mocniny dostaneme tak, že vynásobíme všechny koeficienty u proměnné λ, protože součin diagonálních prvků matice $A - \lambda I$ je zcela určitě jeden ze sčítanců v rozvoji determinantu $|A - \lambda I|$, tj.

$$c_n = (-1)^n.$$

Každý polynom stupně n lze jednoznačně napsat jako součin kořenových činitelů, přičemž jednotlivé kořenové činitele odpovídají kořenům polynomu $p(\lambda)$, tj. vlastním hodnotám matice A. Tzn. Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost – tedy celkem je n kořenů pro polynom $p(\lambda)$ stupně n), potom je

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n).$$

Dále, koeficient c_n u nejvyšší mocniny dostaneme tak, že vynásobíme všechny koeficienty u proměnné λ, protože součin diagonálních prvků matice $A - \lambda I$ je zcela určitě jeden ze sčítanců v rozvoji determinantu $|A - \lambda I|$, tj.

$$c_n = (-1)^n.$$

Každý polynom stupně n lze jednoznačně napsat jako součin kořenových činitelů, přičemž jednotlivé kořenové činitele odpovídají kořenům polynomu $p(\lambda)$, tj. vlastním hodnotám matice A. Tzn. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost – tedy celkem je n kořenů pro polynom $p(\lambda)$ stupně n), potom je

$$p(\lambda) = (-1)^n \, (\lambda - \lambda_1) \, (\lambda - \lambda_2) \, \dots \, (\lambda - \lambda_n).$$

Opětovnou volbou $\lambda = 0$ dostaneme

$$p(0) = (-1)^n \, (-\lambda_1) \, (-\lambda_2) \, \dots \, (-\lambda_n) = (-1)^n \, (-1)^n \, \lambda_1 \, \lambda_2 \, \dots \, \lambda_n = \lambda_1 \, \lambda_2$$

Porovnáním s předchozím jsme odvodili následující důležitý fakt.

Věta

Determinant matice A je roven součinu všech jejích vlastních hodnot. Tedy jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost), potom je

$$|A| = \lambda_1\,\lambda_2\,\dots\,\lambda_n.$$

Věta

Determinant matice A je roven součinu všech jejích vlastních hodnot. Tedy jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost), potom je

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Analogicky se odvodí:

Věta

Stopa matice A je rovna součtu všech jejích vlastních hodnot. Tedy jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost), potom je

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

Příklad

V 1. příkladu je

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 = (-1)\,.\,2 = -2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{a}$$

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = (-1) + 2 = 1 = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad

V 1. příkladu je

$$|A| = \lambda_1\,\lambda_2 = (-1)\,.\,2 = -2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{a}$$

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = (-1) + 2 = 1 = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

V 2. příkladu je

$$|A| = \lambda_1\,\lambda_2 = (-2+3i)\,.\,(-2-3i) = 4+9 = 13 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{a}$$

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = (-2+3i) + (-2-3i) = -4 = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Plán přednášky

Lineární nezávislost vlastních vektorů

Jednou z nejdůležitějších vlastností vlastních vektorů je to, že vlastní vektory příslušející **různým** vlastním hodnotám jsou **lineárně nezávislé**.

Věta

Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ navzájem různé vlastní hodnoty matice A a $u_1, \dots, u_k$ jejich příslušné vlastní vektory, potom jsou vektory $u_1, \dots, u_k$ lineárně nezávislé.

Důkaz.

Indukcí vzhledem k počtu vektorů. Pro $k = 1$ tvrzení zřejmě platí, protože jeden vlastní vektor u_1 tvoří sám o sobě lineárně nezávislou množinu.

Důkaz.

Indukcí vzhledem k počtu vektorů. Pro $k = 1$ tvrzení zřejmě platí, protože jeden vlastní vektor u_1 tvoří sám o sobě lineárně nezávislou množinu.
Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolnou množinu $k - 1$ vlastních vektorů příslušejících různým vlastním hodnotám.
Lineární závislost či nezávislost vektorů $u_1, \dots, u_k$ určíme z jejich nulové lineární kombinace, tj.

$$a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_k\, u_k = 0.$$

Předně si uvědomme, že pro $i = 1, \dots, k$ je

$$(A - \lambda_1\, I)\, u_i = Au_i - \lambda_1\, u_i = \lambda_i\, u_i - \lambda_1\, u_i = (\lambda_i - \lambda_1)\, u_i,$$

zejména pro $i = 1$ je pak $(A - \lambda_1\, I)\, u_1 = 0$. Předchozí rovnost vynásobíme zleva maticí $A - \lambda_1\, I$ a dostaneme $\square$

Pokr. důkazu.

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda_1 I)(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_k u_k) \\ &= a_1 \underbrace{(A - \lambda_1 I) u_1}_{=0} + a_2 (A - \lambda_1 I) u_2 + \cdots + a_k (A - \lambda_1 I) u_k \\ &= a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) u_2 + \cdots + a_k (\lambda_k - \lambda_1) u_k . \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy nulovou lineární kombinaci vlastních vektorů $u_2, \ldots, u_k$, kterých je $k - 1$. Podle indukčního předpokladu je tato množina $k - 1$ vektorů lineárně nezávislá, a tedy musí platit

$$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = a_3 (\lambda_3 - \lambda_1) = \cdots = a_k (\lambda_k - \lambda_1) = 0.$$

Ale protože jsou vlastní hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ navzájem různé, plyne z předchozího, že $a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0$.
Odtud dále plyne, že $a_1 u_1 = 0$. A protože je $u_1 \neq 0$, je také koeficient $a_1 = 0$. $\square$

Příklad

Ukázali jsme, že pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

dostáváme vlastní hodnoty $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a jim příslušné $\mathrm{Eigen}(0) = \langle (1,1,1)^T \rangle, \mathrm{Eigen}(1) = \langle (-1,0,1)^T, (3,1,0)^T \rangle$.

Příklad

Ukázali jsme, že pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

dostáváme vlastní hodnoty $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a jim příslušné $\mathrm{Eigen}(0) = \langle (1,1,1)^T \rangle, \mathrm{Eigen}(1) = \langle (-1,0,1)^T, (3,1,0)^T \rangle$. Vlastní vektor $(1,1,1)^T$ (či jeho libovolný nenulový násobek) je lineárně nezávislý s každým z vektorů $(-1,0,1)^T, (3,1,0)^T$ (či jejich libovolnou nenulovou lineární kombinací). Samozřejmě platí, že poslední 2 vektory jsou lineárně nezávislé, je tedy lineárně nezávislá celá trojice těchto vektorů.

Příklad

Ukázali jsme, že pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

dostáváme vlastní hodnoty $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a jim příslušné $\mathrm{Eigen}(0) = \langle (1,1,1)^T \rangle, \mathrm{Eigen}(1) = \langle (-1,0,1)^T, (3,1,0)^T \rangle$. Vlastní vektor $(1,1,1)^T$ (či jeho libovolný nenulový násobek) je lineárně nezávislý s každým z vektorů $(-1,0,1)^T, (3,1,0)^T$ (či jejich libovolnou nenulovou lineární kombinací). Samozřejmě platí, že poslední 2 vektory jsou lineárně nezávislé, je tedy lineárně nezávislá celá trojice těchto vektorů.

Důsledek

Má-li matice A n navzájem různých vlastních hodnot, potom je množina příslušných vlastních vektorů (o n prvcích) lineárně nezávislá a tedy tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$.

Tvrzení

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ *vlastní hodnota matice* A *a* $u \in \mathbb{C}^n$ *příslušný vlastní vektor, potom splňují vztah*

$$\lambda = \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{u^T A u}{\|u\|_2^2}.$$

Tvrzení

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní hodnota matice A a $u \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor, potom splňují vztah

$$\lambda = \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{u^T A u}{\|u\|_2^2}.$$

Důkaz.

Snadno vynásobením rovnice $Au = \lambda u$ zleva vektorem u^T. $\square$

Tvrzení

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní hodnota matice A a $u \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor, potom splňují vztah

$$\lambda = \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = \frac{u^T Au}{\|u\|_2^2}.$$

Důkaz.

Snadno vynásobením rovnice $Au = \lambda\, u$ zleva vektorem u^T. □

Příklad

Pro matici z předchozího příkladu máme

$$\lambda_1 = 0, \quad u_1 = (1,1,1)^T, \quad \frac{u_1^T Au_1}{\|u_1\|_2^2} = \frac{0}{3} = 0 = \lambda_1,$$

$$\lambda_2 = 1, \quad u_2 = (-1,0,1)^T, \quad \frac{u_2^T Au_2}{\|u_2\|_2^2} = \frac{2}{2} = 1 = \lambda_2.$$

Tvrzení

Je-li A (horní nebo dolní) trojúhelníková matice, potom jsou její vlastní hodnoty rovny prvkům na hlavní diagonále. Zejména toto pravidlo platí pro matice diagonální.

Tvrzení

Je-li A (horní nebo dolní) trojúhelníková matice, potom jsou její vlastní hodnoty rovny prvkům na hlavní diagonále. Zejména toto pravidlo platí pro matice diagonální.

Poznámka

Z vlastností kořenů polynomu vyplývá, že pokud má matice A pouze **reálné** prvky, tak potom pokud má komplexní vlastní hodnotu $\lambda = \alpha + \beta i$, tak potom je vlastní hodnota i číslo komplexně sdružené $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$, tj. komplexní vlastní hodnoty se vyskytují jako komplexně sdružené páry. Přitom vlastní vektory příslušné komplexně sdruženým vlastním hodnotám jsou také navzájem komplexně sdružené.

Pomocí vlastních hodnot lze jednoduše charakterizovat regulární a singulární matice.

Tvrzení

(i) *Matice A je singulární* $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ *je vlastní hodnota matice A.*

(ii) *Matice A je regulární* $\Leftrightarrow$ *všechny vlastní hodnoty matice A jsou různé od nuly.*

Pomocí vlastních hodnot lze jednoduše charakterizovat regulární a singulární matice.

Tvrzení

(i) *Matice A je singulární* $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ *je vlastní hodnota matice A.*

(ii) *Matice A je regulární* $\Leftrightarrow$ *všechny vlastní hodnoty matice A jsou různé od nuly.*

Důkaz.

(i) Je-li matice A singulární, potom má homogenní systém $Au = 0$ netriviální řešení u. Tedy pro tento vektor u platí $Au = 0 \,.\, u$, neboli u je vlastní vektor příslušející vlastní hodnotě $\lambda = 0$. Naopak, je-li $\lambda = 0$ vlastní hodnota matice A, potom pro příslušný vlastní vektor u $(\neq 0)$ platí vztah $Au = 0 \,.\, u = 0$, tedy matice A je singulární.
(ii) Tato část plyne z části (i), protože $\lambda = 0$ nemůže být vlastní hodnota regulární matice A.

Pomocí vlastních hodnot lze jednoduše charakterizovat regulární a singulární matice.

Tvrzení

(i) *Matice A je singulární* $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ *je vlastní hodnota matice A.*

(ii) *Matice A je regulární* $\Leftrightarrow$ *všechny vlastní hodnoty matice A jsou různé od nuly.*

Důkaz.

(i) Je-li matice A singulární, potom má homogenní systém $Au = 0$ netriviální řešení u. Tedy pro tento vektor u platí $Au = 0 \,.\, u$, neboli u je vlastní vektor příslušející vlastní hodnotě $\lambda = 0$. Naopak, je-li $\lambda = 0$ vlastní hodnota matice A, potom pro příslušný vlastní vektor u $(\neq 0)$ platí vztah $Au = 0 \,.\, u = 0$, tedy matice A je singulární.
(ii) Tato část plyne z části (i), protože $\lambda = 0$ nemůže být vlastní hodnota regulární matice A.
Alternativně plyne důkaz obou částí plyne z tvrzení o výpočtu $|A|$ pomocí vlastních hodnot.

$\square$

Tvrzení

Nechť A je regulární matice. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní hodnota matice A $\Leftrightarrow$ číslo $\frac{1}{\lambda}$ je vlastní hodnota matice A^{-1}.

Tvrzení

Nechť A je regulární matice. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní hodnota matice $A \Leftrightarrow$ číslo $\frac{1}{\lambda}$ je vlastní hodnota matice A^{-1}.

Důkaz.

Toto tvrzení plyne přímo ze vztahu

$$0 = \underbrace{|A - \lambda I|}_{p_A(\lambda)} = |A(I - \lambda A^{-1})| = \left|\lambda A\left(\frac{1}{\lambda} I - A^{-1}\right)\right| = |\lambda A| . \left|\left(\frac{1}{\lambda} I - A\right.\right.$$

$$= \lambda^n . |A| . \left|\frac{1}{\lambda} I - A^{-1}\right| = \underbrace{\lambda^n}_{\neq 0} . \underbrace{|A|}_{\neq 0} . (-1)^n . \underbrace{\left|A^{-1} - \frac{1}{\lambda} I\right|}_{p_{A^{-1}}(\frac{1}{\lambda})},$$

kde jsme použili Cauchyovu větu o determinantu součinu. Tedy číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní hodnota matice $A \Leftrightarrow$ číslo $\frac{1}{\lambda}$ je vlastní hodnota matice A^{-1}.

□

V části o reprezentaci lineární transformace pomocí matice jsme se zabývali podobnými maticemi, tj. $A \sim B$ pokud $B = T^{-1} A T$ pro nějakou regulární matici T.

Tvrzení

Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

V části o reprezentaci lineární transformace pomocí matice jsme se zabývali podobnými maticemi, tj. $A \sim B$ pokud $B = T^{-1} A T$ pro nějakou regulární matici T.

Tvrzení

Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Důkaz.

Je-li $B = T^{-1} A T$, potom je charakteristický polynom matice B roven

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= |B - \lambda I| = |T^{-1} A T - \lambda I| = \left|T^{-1} (A - \lambda T I T^{-1}) T\right| \\ &= |T^{-1}| \, . \, |A - \lambda I| \, . \, |T| = |A - \lambda I| \, . \, |T|^{-1} \, |T| = |A - \lambda I| = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

tj. charakteristické polynomy matic A a B jsou totožné. $\square$

V části o reprezentaci lineární transformace pomocí matice jsme se zabývali podobnými maticemi, tj. $A \sim B$ pokud $B = T^{-1} A T$ pro nějakou regulární matici T.

Tvrzení

Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Důkaz.

Je-li $B = T^{-1} A T$, potom je charakteristický polynom matice B roven

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |T^{-1} A T - \lambda I| = \left|T^{-1} (A - \lambda T I T^{-1}) T\right|$$
$$= |T^{-1}| \,.\, |A - \lambda I| \,.\, |T| = |A - \lambda I| \,.\, |T|^{-1} |T| = |A - \lambda I| = p_A(\lambda)$$

tj. charakteristické polynomy matic A a B jsou totožné. □

Důsledek

Podobné matice mají stejné vlastní hodnoty a tedy i stejný determinant a stejnou stopu (součet prvků na hlavní diagonále).

Předchozí důsledek říká, že vlastní hodnoty a vlastní vektory (tj. *preferované násobky* a *preferované směry*) lineární transformace nezávisejí na volbě báze, v níž tuto lineární transformaci reprezentujeme pomocí matice.

Předchozí důsledek říká, že vlastní hodnoty a vlastní vektory (tj. *preferované násobky* a *preferované směry*) lineární transformace nezávisejí na volbě báze, v níž tuto lineární transformaci reprezentujeme pomocí matice.
Jelikož je charakteristický polynom založen na výpočtu determinantu a determinant lze spočítat rozvojem podle libovolného **řádku** nebo **sloupce** (Laplaceova věta o rozvoji), mají matice A a A^T stejný charakteristický polynom a tedy i stejné vlastní hodnoty.

Tvrzení

Matice A a matice A^T mají stejný charakteristický polynom a tedy i stejné vlastní hodnoty.

Báze z vlastních vektorů

Před časem jsme viděli, že někdy je množné zvolit bázi prostoru $\mathbb{R}^n$ z vlastních vektorů matice A.

Báze z vlastních vektorů

Před časem jsme viděli, že někdy je množné zvolit bázi prostoru $\mathbb{R}^n$ z vlastních vektorů matice A.

Uvažujeme lineární transformaci $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zadanou maticí A, tj. $L(u) = A \cdot u$ (tedy $L = L_A$). Je zřejmé, že maticová reprezentace takové lineární transformace **záleží na volbě báze u** prostoru $\mathbb{R}^n$. Pokud ale zvolíme bázi **u** *šikovně*, může být maticová reprezentace transformace L velmi jednoduchá.

Tvrzení

Má-li matice A n lineárně nezávislých vlastních vektorů $u_1, \dots, u_n$ a označíme-li jako $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_n)$ příslušnou bázi, potom má lineární zobrazení L_A v této bázi **diagonální** *maticovou reprezentaci. Navíc, na hlavní diagonále jsou právě vlastní hodnoty příslušné (postupně) vlastním vektorům $u_1, \dots, u_n$.*

Diagonalizovatelné matice

Je-li A čtvercová matice řádu n, potom nás zajímá,

Kolik lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A vlastně má?

Diagonalizovatelné matice

Je-li A čtvercová matice řádu n, potom nás zajímá,

Kolik lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A vlastně má?

Pokud má matice A **plný počet (tj. n)** lineárně nezávislých vlastních vektorů, potom lze tuto matici *diagonalizovat*. Označme jako $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty (nemusí být nutně všechny navzájem různé) a jako $u_1, \dots, u_n$ příslušné lineárně nezávislé vlastní vektory (jako **sloupcové vektory!**), a položme

$$P := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Matice P se nazývá **matice vlastních vektorů** a matice D se nazývá **matice vlastních hodnot**.

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá **diagonalizovatelná**, jestliže je podobná diagonální matici, tj. jestliže existuje diagonální matice D a regulární matice P takové, že platí

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{neboli} \quad D = P^{-1}AP.$$

Proces nalezení diagonální matice D a regulární matice P se nazývá **diagonalizace** matice A

Důsledek

Každá matice A, která má n navzájem různých vlastních hodnot, je diagonalizovatelná.

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá **diagonalizovatelná**, jestliže je podobná diagonální matici, tj. jestliže existuje diagonální matice D a regulární matice P takové, že platí

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{neboli} \quad D = P^{-1}AP.$$

Proces nalezení diagonální matice D a regulární matice P se nazývá **diagonalizace** matice A

Důsledek

Každá matice A, která má n navzájem různých vlastních hodnot, je diagonalizovatelná.

Poznámka

Snadno se ukáže i platnost opačného tvrzení, tj. *každá diagonalizovatelná matice má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.*