Př: $A^k = ?$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

vl. hodnoty $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ (alg. nás. 2)

$\mathrm{Eigen}(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Eigen}(1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ A je diagonalizovatelná

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

vl. vektory $\qquad$ vl. h.

$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1} =$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k P^{-1} =$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} 0^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1} =$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} =$$

$$= P \cdot D \cdot P^{-1} = A$$

Cayley-Ham. věta pro diag. mce

D ... diagonální

$$p(D) = (-1)^n \cdot D^n + \dots + c_1 D + c_0 \cdot E_n =$$

$$= (-1)^n \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} c_1\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_1\lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 & & \\ & \ddots & \\ & & c_0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n) + \dots + \operatorname{diag}(c_1\lambda_1, \dots, c_1\lambda_n) +$$

$$+ \operatorname{diag}(c_0, \dots, c_0) =$$

$$= \operatorname{diag}\Big(\underbrace{(-1)^n \cdot \lambda_1^n + c_{n-1} \cdot \lambda_1^{n-1} + \dots + c_1\lambda_1 + c_0}_{p(\lambda_1) = 0}, \dots\dots\Big) =$$

$$= \operatorname{diag}(0, \dots, 0) = 0$$

$A \ldots$ diagonalizovatelná

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$$

$$p(A) = \underline{(-1)^n} \cdot P D^n \cdot P^{-1} + \underline{c_{n-1}} \cdot P \cdot D^{n-1} \cdot P^{-1} +$$

$$\ldots + \underline{c_1} P D P^{-1} + \underline{c_0} P E_n P^{-1} =$$

$$= P \cdot \underbrace{\left((-1)^n \cdot D^n + c_{n-1} \cdot D^{n-1} + \ldots + c_0 E_n \right)}_{} \cdot P^{-1}$$

$$= 0$$

Sym. matice:

$A \dots {}^{m \times n}$

$A^T A$ řádu n

$A A^T$ řádu m

$A^T A$ je symetrická?

$$(A^T \cdot A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A$$

$$\boxed{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$$

$$(A^k)^T = (A \cdot A \cdot \dots A)^T = A^T \cdot A^T \dots A^T =$$

$$= (A^T)^k \overset{A^T = A}{\Longrightarrow} (A^k)^T = A^k$$

A^{-1} je sym. ?

$$(A^{-1})^T \overset{(*)}{=} (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

(*) $$(A^{-1})^T \cdot A^T \overset{\cancel{?}}{=} E$$

$$(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T =$$

$$= E^T = E$$

A, B sym.

$A \cdot B$ je sym. $\Longleftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$

Dk.: "$\Longleftarrow$" $(A \cdot B)^T \overset{tr.}{=} B^T \cdot A^T \overset{sym.\ A,B}{=}$

$= B \cdot A \overset{předp.}{=} A \cdot B$

"$\Longrightarrow$" $A \cdot B \overset{předp.}{=} (A \cdot B)^T \overset{tr.}{=} B^T \cdot A^T =$

$\overset{sym.\ A,B}{=} B \cdot A$

Vl. hodnoty symetrických matic

i) $\forall$ vl. hodnoty jsou reálné

je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vl. hodnota matice A,
je i $\bar{\lambda}$ vl. hodnota A pro příslušné vlastní vektory platí:

$A \cdot u = \lambda \cdot u$; $A \cdot \bar{u} = \bar{\lambda} \cdot \bar{u}$

$\Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

Pak

$$\boxed{\lambda \cdot \underbrace{\langle u, u \rangle}_{>0}} = \langle \lambda u, u \rangle = \langle A \cdot u, u \rangle =$$

$$= \langle u, A \cdot u \rangle = \langle u, \lambda u \rangle =$$

$$= \boxed{\bar{\lambda} \cdot \langle u, u \rangle}$$

(iii) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ různé vl. hodnoty sym. mce A
u_1, u_2 příslušné vl. vektory

$$\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle = \langle \lambda_1 \cdot u_1, u_2 \rangle =$$

$$= \langle A \cdot u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, A \cdot u_2 \rangle =$$

$$= \langle u_1, \lambda_2 \cdot u_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \cdot \langle u_1, u_2 \rangle$$

$$= \lambda_2 \cdot \langle u_1, u_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot \langle u_1, u_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle u_1, u_2 \rangle = 0$$