Matematika I – 13. přednáška
Lineární procesy, diferenční rovnice, Markovovy procesy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

13. 5. 2009

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).

Plán přednášky

1. Lineární procesy
   - Iterované procesy
   - Markovovy procesy

Lineární procesy

Jednoduché lineární procesy jsou dány lineárními zobrazeními $\varphi : V \to W$ na vektorových prostorech. Pokud nám totiž vektor $v \in V$ představuje stav nějakého námi sledovaného jevu (třeba počty občanů tříděných dle nejvyšší dosažené kvalifikace, stav zásob jednotlivých dílů a výrobků atd.), pak $\varphi(v)$ může představovat výsledek provedené operace (výsledek vzdělávací činnosti školské soustavy nebo výroba a prodej za určité časové období apod.). Pokud chceme dosáhnout předem daného výsledku $b \in W$ takového jednorázového procesu, řešíme problém

$$\varphi(x) = b$$

pro neznámý vektor x. V pevně zvolených souřadnicích pak máme matici A zobrazení φ a souřadné vyjádření vektoru b. Jak jsme si ukázali už dříve, řešení tzv. **homogenní úlohy**

$$A \cdot x = 0$$

je vektorovým podprostorem.

Iterované procesy

Pokud je dán nějaký proces prostřednictvím lineární operace pro jednotlivá časová období, budeme chtít umět studovat jeho chování během delší doby. Uvedeme si alespoň ilustrativní příklady.

Iterované procesy

Pokud je dán nějaký proces prostřednictvím lineární operace pro jednotlivá časová období, budeme chtít umět studovat jeho chování během delší doby. Uvedeme si alespoň ilustrativní příklady. Představme si, že zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod) rozdělený do m skupin (třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod.). Stav x_n je tedy dán vektorem $(a_1, \dots, a_m)$ závisejícím na okamžiku t_n, ve kterém systém pozorujeme. Lineární model vývoje takového systému je dán maticí A dimenze n, která zadává změnu vektoru x_n na

$$x_{n+1} = A \cdot x_n$$

při přírůstku času z t_k na t_{k+1}.

Leslieho model růstu

Dobrým příkladem lineárních procesů je tzv. **Leslieho model růstu**. V takových modelech vystupuje matice popisující vývoj populace rozdělené na několik věkových skupin

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \end{pmatrix},$$

kde f_i označuje relativní plodnost příslušné věkové skupiny (ve sledovaném časovém skoku vznikne z N jedinců v i–té skupině $f_i N$ jedinců nových, tj. ve skupině první), zatímco τ_i je relativní úmrtnost i-té skupiny během jednoho období.

Leslieho model růstu (2)

Všechny koeficienty jsou tedy kladná reálná čísla a τ jsou mezi nulou a jedničkou. Přímým výpočtem (třeba využitím Laplaceova rozvoje) nyní spočteme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^5 - a\lambda^4 - b\lambda^3 - c\lambda^2 - d\lambda - e$$

s vesměs nezápornými koeficienty a, b, c, d, e, např. $e = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 f_5$. Je tedy

$$p(\lambda) = \lambda^5(1 - q(\lambda))$$

kde q je ostře klesající a nezáporná funkce pro $\lambda > 0$. Evidentně bude proto existovat právě jedno kladné λ, pro které bude $q(\lambda) = 1$ a tedy $p(\lambda) = 0$. Jinými slovy, pro každou Leslieho matici existuje právě jedno kladné vlastní číslo.

Leslieho model růstu (3)

Pro konkrétní koeficienty (např. když všechny f_i jsou také mezi nulou a jedničkou) můžeme dojít k závěru, že absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel jsou ostře menší než jedna, zatímco dominantní vlastní číslo může být vetší než jedna. V takovém případě při iteraci kroků našeho procesu dojde při libovolné počáteční hodnotě x_0 k postupnému přiblížení rozložení populace do věkových skupin k poměrům komponent vlastního vektoru příslušného k **dominantnímu vlastnímu číslu**.

Leslieho model růstu (3)

Pro konkrétní koeficienty (např. když všechny f_i jsou také mezi nulou a jedničkou) můžeme dojít k závěru, že absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel jsou ostře menší než jedna, zatímco dominantní vlastní číslo může být vetší než jedna. V takovém případě při iteraci kroků našeho procesu dojde při libovolné počáteční hodnotě x_0 k postupnému přiblížení rozložení populace do věkových skupin k poměrům komponent vlastního vektoru příslušného k **dominantnímu vlastnímu číslu**.

Například pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

vyjdou vlastní hodnoty přibližně

$$1.03, \ 0, \ -0.5, \ -0.27 + 0.74i, \ -0.27 - 0.74i$$

Leslieho model růstu (4)

Vlastním vektorem příslušným dominantnímu vlastnímu číslu 1.03 je přibližně

$$x = (30\ 27\ 21\ 14\ 8).$$

Zvolili jsme rovnou jediný vlastní vektor se součtem složek rovným stu, zadává nám proto přímo výsledné procentní rozložení populace.

Příklad

Uvažujme Leslieho model růstu pro populaci krys, které máme rozděleny do tří věkových skupin: do jednoho roku, od jednoho do dvou let a od dvou let do tří. Předpokládáme, že se žádná krysa nedožívá více než tří let. Průměrná porodnost v jednotlivých věkových skupinách připadajících na jednu krysu je následující: v 1.skupině je to nula a ve druhé i třetí 2 krysy. Krysy, které se dožijí jednoho roku umírají až po druhém roce života (úmrtnost ve druhé skupině je nulová). Určete úmrtnost v první skupině víte-li, že daná populace krys stagnuje (počet jedinců v ní se nemění).

Příklad

Uvažujme Leslieho model růstu pro populaci krys, které máme rozděleny do tří věkových skupin: do jednoho roku, od jednoho do dvou let a od dvou let do tří. Předpokládáme, že se žádná krysa nedožívá více než tří let. Průměrná porodnost v jednotlivých věkových skupinách připadajících na jednu krysu je následující: v 1.skupině je to nula a ve druhé i třetí 2 krysy. Krysy, které se dožijí jednoho roku umírají až po druhém roce života (úmrtnost ve druhé skupině je nulová). Určete úmrtnost v první skupině víte-li, že daná populace krys stagnuje (počet jedinců v ní se nemění).

Řešení

Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

má mít vlastní hodnotu 1, odkud $a = 1/4$.

Markovovy procesy a řetězce

Velice častý a zajímavý případ lineárních procesů je popis systému, který se může nacházet v m různých stavech s různou pravděpodobností. V jistém okamžiku je ve stavu s pravděpodobností a_i pro stav i a k přechodu z možného stavu i do stavu j dojde s pravděpodobností t_{ij}.
Můžeme tedy proces zapsat takto: V čase n je systém popsán pravděpodobnostním vektorem $x_n = (a_1, \dots, a_m)$. To znamená, že všechny komponenty vektoru x jsou reálná nezáporná čísla a jejich součet je roven jedné. Komponenty udávají rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých možností stavů systému. Rozdělení pravděpodobností pro čas $n+1$ bude dáno vynásobením pravděpodobnostní maticí přechodu $T = (t_{ij})$, tj.

$$x_{n+1} = T \cdot x_n.$$

Protože předpokládáme, že vektor x zachycuje všechny možné stavy, budou všechny sloupce matice T tvořeny také pravděpodobnostními vektory. Takovému procesu říkáme **Markovův proces**. Všimněme si, že každý pravděpodobnostní vektor x je opět zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_{i,j} t_{ij}x_j = \sum_j (\sum_i t_{ij})x_j = \sum_j x_j = 1.$$

Protože předpokládáme, že vektor x zachycuje všechny možné stavy, budou všechny sloupce matice T tvořeny také pravděpodobnostními vektory. Takovému procesu říkáme **Markovův proces**. Všimněme si, že každý pravděpodobnostní vektor x je opět zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_{i,j} t_{ij}x_j = \sum_j (\sum_i t_{ij})x_j = \sum_j x_j = 1.$$

Protože je součet řádků matice T vždy roven vektoru $(1, \dots, 1)$, bude jednička zaručeně vlastním číslem matice T a k ní musí existovat vlastní vektor x_0. Abychom mohli podrobněji pochopit chování Markovových procesů, uvedeme si docela snadno pochopitelné obecné tvrzení o maticích, tzv. Perronovu–Frobeniovu větu.

Věta (Perron-Frobenius)

Nechť A je reálná čtvercová matice dimenze m s kladnými prvky. Pak platí

1. *existuje reálné vlastní číslo λ_m matice A takové, že pro všchna ostatní vlastní čísla λ platí $|\lambda| < \lambda_m$ (**dominantní vl.č.**),*
2. *vlastní číslo λ_m má algebraickou násobnost jedna,*
3. *vlastní podprostor odpovídající λ_m obsahuje vektor se všemi souřadnicemi kladnými*
4. *platí odhad $\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_m \leq \max_i \sum_j a_{ij}$.*

Věta (Perron-Frobenius)

Nechť A je reálná čtvercová matice dimenze m s kladnými prvky. Pak platí

1. *existuje reálné vlastní číslo λ_m matice A takové, že pro všchna ostatní vlastní čísla λ platí $|\lambda| < \lambda_m$ (**dominantní vl.č.**),*
2. *vlastní číslo λ_m má algebraickou násobnost jedna,*
3. *vlastní podprostor odpovídající λ_m obsahuje vektor se všemi souřadnicemi kladnými*
4. *platí odhad $\min_i \sum_j a_{ij} \leq \lambda_m \leq \max_i \sum_j a_{ij}$.*

Důsledkem této věty pro Markovovy procesy s maticí, která nemá žádné nulové prvky (nebo jejíž některá mocnina má tuto vlastnost), je

- existence vlastního vektoru x_∞ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní
- přibližování hodnoty iterací $T^k x_0$ k vektoru x_∞ pro jakýkoliv pravděpodobnostní vektor x_0.

Příklady Markovových procesů

- viz `lecture13/iterovane_procesy.pdf` (applet `http://cauchy.math.colostate.edu/Applets/PredatorPrey/predatorprey.htm`)

Příklady Markovových procesů

- viz lecture13/iterovane_procesy.pdf (applet http://cauchy.math.colostate.edu/Applets/PredatorPrey/predatorprey.htm)
- viz lecture13/google-PageRank.pdf (resp. lecture13/SlideGooglePageRank.pdf)

Příklady Markovových procesů

- viz `lecture13/iterovane_procesy.pdf` (applet `http://cauchy.math.colostate.edu/Applets/PredatorPrey/predatorprey.htm`)
- viz `lecture13/google-PageRank.pdf` (resp. `lecture13/SlideGooglePageRank.pdf`)
- Mlsný hazardér (viz `prednasky_MB101_podzim2008.pdf`)

Lineární diferenční rovnice

- Viz `roughmath.pdf`, kapitola 1, např. Fibonacciho posloupnost
- Viz `roughmath.pdf`, kapitola 3, odst. 1.2. (př. 3.8).