Relace a zobrazení

Petr Pupík

11.3.2009

Obsah

Kartézský součin množin

Definice

Nechť A, B jsou množiny. Potom **kartézským součinem** množin A, B rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A, b \in B$. Tedy $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Označení

Nechť A je konečná množina. symbolem $|A|$ budeme označovat počet prvků množiny A.

Věta

Nechť A, B jsou konečné množiny. Potom $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Kartézský součin množin

Příklad

Nechť $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \emptyset$. Potom

- $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
- $B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$
- $A \times C = \emptyset$

Definice relace

Definice

Nechť A, B jsou množiny. Potom **relací** ρ mezi množinami A, B rozumíme libovolnou podmnožinu možiny $A \times B$. Je-li $A = B$, mluvíme o relaci na množině A.

Je-li $(a, b) \in \rho$, říkáme, že prvek a je v relaci ρ s prvkem b. Můžeme také psát $a \; \rho \; b$.

Příklad relace

Příklad

Nechť $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$. Potom

- $\rho = A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$ je relací mezi množinami A, B, které říkáme **univerzální relace** mezi množinami A, B
- $\sigma = \{(a, 1), (b, 1)\}$ je relací mezi množinami B, A.
- $\tau = \emptyset$ je relací mezi množinami A, B, které říkáme **prázdná relace** mezi množinami A, B

Zadání relací

Zadání relací

- Tabulkou

ρ	a	b
1	1	0
2	0	1
3	1	0

- Šipkami mezi jednotlivými prvky, které jsou v relaci
- Předpisem

Relace na množině

Definice

Nechť A je množina. Nechť ρ je relace na množině A. Potom řekneme, že ρ je

- **reflexivní** relace, jestliže $\forall a \in A : (a, a) \in \rho$,
- **symetrická** relace, jestliže $\forall a, b \in A : (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$,
- **antisymetrická** relace, jestliže $\forall a, b \in A : (a, b) \in \rho, (b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$,
- **tranzitivní** relace, jestliže $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in \rho, (b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$,
- **úplná** relace, jestliže $\forall a, b \in A : (a, b) \in \rho \ \vee \ (b, a) \in \rho$.

Příklady

Příklad

Nechť A je množina všech studentů, kteří mají zapsaný předmět Matematika 1. Řekneme, že student a je v relaci se studentem b, jestliže

- a chodí do stejné seminární skupiny jako b.
- a viděl studenta b na přednášce
- a má stejnou strukturu DNA jako b
- a je zamilovaný do b

Příklad

Nechť je dána relace ρ na množině přirozených čísel takto $x\rho y$ právě tehdy, když je $x \cdot y$ liché číslo. Určete vlastnosti této relace.

Skládání relací

Definice

Nechť A, B, C jsou množiny. Nechť ρ je relace mezi množinami A, B, σ je relace mezi množinami B, C. Potom relaci $\sigma \circ \rho = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in \rho, (b, c) \in \sigma\}$ nazýváme **složená relace** z relací ρ a σ.

Příklad

Nechť $A = \{a, b, c, d\}, B = \{x, y, z\}, C = \{k, l, m, n\}$. Nechť ρ je relace mezi množinami A, B, $\rho = \{(a, y), (c, y), (c, z)\}$. Nechť σ je relace mezi množinami B, C,
$\sigma = \{(x, k), (x, l), (x, m), (x, n), (y, k), (y, n)\}$. Potom
$\sigma \circ \rho = \{(a, k), (a, n), (c, k), (c, n)\}$.

Skládání relací

Věta

Nechť A, B, C, D jsou množiny. Nechť ρ je relace mezi množinami A, B, σ je relace mezi množinami B, C, τ je relace mezi množinami C, D. Potom platí

$$\tau \circ (\sigma \circ \rho) = (\tau \circ \sigma) \circ \rho.$$

Inverzní relace

Definice

Nechť A, B jsou množiny. Nechť ρ je relace mezi množinami A, B. Potom **inverzní** relaci ρ^{-1} k relaci ρ definujeme vztahem $\rho^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \mid (y, x) \in \rho\}$.

Věta

Nechť A, B, C jsou množiny. Nechť ρ je relace mezi množinami A, B, σ je relace mezi množinami B, C. Potom platí, že

- $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$,
- $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

Ekvivalence a uspořádání

Definice

Nechť A je množina. Nechť ρ je relace na množině A, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Potom říkáme, že ρ je relace **ekvivalence**.

Definice

Nechť A je množina. Nechť ρ je relace na množině A, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Potom říkáme, že ρ je relace **uspořádání**.

Ekvivalence a uspořádání

Příklady

- Relace rovnosti na množině celých čísel.
- Relace dělitelnosti na množině přirozených čísel.
- Relace množinové inkluze na systému všech podmnožin libovolné množiny.
- Relace kongruence na množině celých čísel.
- Relace menší nebo rovno na množině reálných čísel.
- Relace zamilovanost na množině všech zapsaných studentů do MB101.

Ekvivalence

Definice

Nechť X libovolná množina. Potom systém po dvou disjunktních neprázdných podmnožin množiny X, jejichž sjednocením je celá množina X nazýváme **rozklad** množiny X. Jednotlivé podmnožiny nazýváme třídy rozkladu.

Příklad

- Sudá a lichá celá čísla tvoří tozklad množiny $\mathbb{Z}$.
- Kladná reálná čísla, záporná reálná čísla a $\{0\}$ tvoří rozklad množiny $\mathbb{R}$.

Rozklad příslušný ekvivalenci, ekvivalence příslušná rozkladu

Věta

Nechť ρ je ekvivalence na množině X. Uvažme systém podmnožin A_i takový, že $x, y \in A_i \Leftrightarrow x\rho y$. Potom systém podmnožin A_i tvoří rozklad namnožině X.

Věta

Nechť $\{A_i\}$ je rozklad na množině X. Položme $x\rho y$ právě tehdy, když $\exists i : x, y \in A_i$. Potom ρ je relace ekvivalence na množině X.

Příklad

Zbytkové třídy modulo m.

Uspořádání

Definice

Nechť A je množina, $\leq$ relace uspořádání na A. Potom dvojci $(A, \leq)$ nazýváme uspořádaná množina.

Definice

Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, B její podmnožina. Řekneme, že prvek $a \in A$ je horní závora množiny B, jestliže pro všechny prvky b množiny B platí, že $b \leq a$.
Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, B její podmnožina. Řekneme, že prvek $a \in A$ je dolní závora množiny B, jestliže pro všechny prvky b množiny B platí, že $a \leq b$.

Uspořádání

Definice

Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, B její podmnožina. Řekneme, že množina B je shora ohraničená, jestliže existuje alespoň jedna její horní závora. Podobně řekneme, že B je zdola ohraničená, jestliže existuje alespoň jedna její dolní závora.

Uspořádání

Definice

Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, B její podmnožina. Řekneme, že prvek $a \in A$ je supremum množiny B, jestliže a je horní závora množiny B a je-li h horní závora množiny B, potom $a \leq h$.
Nechť $(A, \leq)$ je uspořádaná množina, B její podmnožina. Řekneme, že prvek $a \in A$ je infimum množiny B, jestliže a je dolní závora množiny B a je-li d horní závora množiny B, potom $d \leq a$.

Obsah

Zobrazení

Definice

Speciálním případem relace mezi množinami A, B je zobrazení z množiny A. Jedná se o takovou relaci, kdy ke každému prvku množiny A existuje právě jeden prvek množiny B, který je s ním v relaci. Místo $x \rho y$ pak píšeme $\rho(x) = y$

Definice

Definiční obor, Obor hodnot

Vlastnosti zobrazení

Definice

- Řekneme, že zobrazení $f : A \to B$ je injektivní, jestliže ke každému prvku B existuje nejvýše jeden vzor.
- Řekneme, že zobrazení $f : A \to B$ je surjektivní, jestliže ke každému prvku B existuje alespoň jeden vzor.
- Řekneme, že zobrazení $f : A \to B$ je bijektivní, jestliže ke každému prvku B existuje právě jeden vzor.

Skládání zobrazení

Definice

Nechť A, B, C jsou množiny, $f : A \to B$, $g : B \to C$.

- Jsou-li f, g injektivní, potom je injektivní i $g \circ f$.
- Jsou-li f, g surjektivní, potom je surjektivní i $g \circ f$.
- Je-li $g \circ f$ injektivní, potom je i f injektivní.
- je-li $g \circ f$ surjektivní, potom je i g surjektivní.

Inverzní zobrazení

Definice

Je-li f bijektivní zobrazení. Potom definujeme inverzní zobrazení f^{-1} jako relaci inverzní k relaci f.

Poznámka

Bijektivita zobrazení f nám zaručuje korektnost definice.

Příklady

Příklad

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x]$.
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{x<0;} \\ 2x - 1, & \text{x>0;} \\ 0, & \text{x=0.} \end{cases}$
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x}{2}$.
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x$.
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$, $f(x) = [x]_m$.