

Matematika I – 6. přednáška

Matice a determinanty

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

25. 3. 2009

Obsah přednášky

- 1 Lineární závislost
- 2 Determinanty
- 3 Věty Cauchyova a Laplaceova
- 4 Determinant a inverzní matice

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, e-text.
- Roman Hilscher – MB101, e-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, e-text.
- Roman Hilscher – MB101, e-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (<http://www.math.muni.cz/~horak>)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na <http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/>).

Plán přednášky

- 1 Lineární závislost
- 2 Determinanty
- 3 Věty Cauchyova a Laplaceova
- 4 Determinant a inverzní matice

Lineární závislost

V předchozích úvahách a počtech s maticemi jsme stále pracovali se sčítáním řádků nebo sloupců coby vektorů, spolu s jejich násobením skaláry. Takové operaci říkáme **lineární kombinace**. V abstraktním pojetí se k operacím s vektory vrátíme později, bude ale užitečné pochopit podstatu už nyní. Lineární kombinací řádků (nebo sloupců) matice $A = (a_{ij})$ typu m/n rozumíme výraz $a_1 u_{i_1} + \dots + a_k u_{i_k}$, kde a_i jsou skaláry, $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ jsou řádky (nebo $u_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ jsou sloupce) matice A .

Lineární závislost

V předchozích úvahách a počtech s maticemi jsme stále pracovali se sčítáním řádků nebo sloupců coby vektorů, spolu s jejich násobením skaláry. Takové operaci říkáme **lineární kombinace**. V abstraktním pojetí se k operacím s vektory vrátíme později, bude ale užitečné pochopit podstatu už nyní. Lineární kombinací řádků (nebo sloupců) matice $A = (a_{ij})$ typu m/n rozumíme výraz $a_1 u_{i_1} + \dots + a_k u_{i_k}$, kde a_i jsou skaláry, $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ jsou řádky (nebo $u_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ jsou sloupce) matice A . Jestliže existuje lineární kombinace daných řádků s alespoň jedním nenulovým skalárním koeficientem, jejímž výsledkem je nulový řádek, říkáme, že jsou **lineárně závislé**. V opačném případě, tj. když jedinou možností jak získat nulový řádek je vynásobením výhradně nulovými skaláry, jsou **lineárně nezávislé**. Obdobně definujeme lineárně závislé a nezávislé sloupce matice.

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme vnímat takovým způsobem, že počet výsledných nenulových schodů v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven témuž přirozenému číslu a to počtu lineárně nezávislých řádků matice a témuž počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Tomuto číslu říkáme **hodnost matice**, značíme $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme vnímat takovým způsobem, že počet výsledných nenulových schodů v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven témuž přirozenému číslu a to počtu lineárně nezávislých řádků matice a témuž počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Tomuto číslu říkáme **hodnost matice**, značíme $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Věta

Nechť A je matice typu m/n nad polem skalárů \mathbb{K} . Matice A má stejný počet $h(A)$ lineárně nezávislých řádků a lineárně nezávislých sloupců. Zejména je hodnost vždy nejvýše rovna menšímu z rozměrů matice A .

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme vnímat takovým způsobem, že počet výsledných nenulových schodů v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven témuž přirozenému číslu a to počtu lineárně nezávislých řádků matice a témuž počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Tomuto číslu říkáme **hodnost matice**, značíme $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Věta

Nechť A je matice typu m/n nad polem skalárů \mathbb{K} . Matice A má stejný počet $h(A)$ lineárně nezávislých řádků a lineárně nezávislých sloupců. Zejména je hodnost vždy nejvýše rovna menšímu z rozměrů matice A .

Algoritmus pro výpočet inverzních matic také říká, že čtvercová matice A dimenze n má inverzi právě, když je její hodnost rovna počtu řádků n .

Soustavy lineárních rovnic

Pomocí hodnosti matice systému $h(A)$ a hodnosti rozšířené matice systému $h(A|b)$ lze jednoduše testovat řešitelnost systému lineárních rovnic s maticí A typu $m \times n$ a vektorem pravých stran $b \in \mathbb{R}^m$. Zřejmě je vždy $h(A) \leq h(A|b)$, protože přidání sloupce b může hodnot matice případně jenom zvýšit. Otázka je, kdy přidání sloupce b skutečně zvýší hodnot matice systému a kdy nikoliv.

Soustavy lineárních rovnic

Pomocí hodnosti matice systému $h(A)$ a hodnosti rozšířené matice systému $h(A|b)$ lze jednoduše testovat řešitelnost systému lineárních rovnic s maticí A typu $m \times n$ a vektorem pravých stran $b \in \mathbb{R}^m$. Zřejmě je vždy $h(A) \leq h(A|b)$, protože přidání sloupce b může hodnotu matice případně jenom zvýšit. Otázka je, kdy přidání sloupce b skutečně zvýší hodnotu matice systému a kdy nikoliv.

Věta (Frobeniova)

System lineárních rovnic má (alespoň jedno) řešení

$$\Leftrightarrow h(A) = h(A|b).$$

Soustavy lineárních rovnic

Pomocí hodnosti matice systému $h(A)$ a hodnosti rozšířené matice systému $h(A|b)$ lze jednoduše testovat řešitelnost systému lineárních rovnic s maticí A typu $m \times n$ a vektorem pravých stran $b \in \mathbb{R}^m$. Zřejmě je vždy $h(A) \leq h(A|b)$, protože přidání sloupce b může hodnotu matice případně jenom zvýšit. Otázka je, kdy přidání sloupce b skutečně zvýší hodnotu matice systému a kdy nikoliv.

Věta (Frobeniova)

Systém lineárních rovnic má (alespoň jedno) řešení

$$\Leftrightarrow h(A) = h(A|b).$$

Důkaz.

$h(A) = h(A|b)$, právě když je vektor b lineární kombinací sloupců matice A . Neboli existují čísla x_1, \dots, x_n tak, že platí

$$(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})^T \cdot x_1 + (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})^T \cdot x_2 + \dots + (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})^T x_n = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T.$$



Lineární nezávislost sloupců matice

Regulární a singulární matice umožňují jednoduše charakterizovat lineární nezávislost a závislost n vektorů $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$. Mají-li být vektory u_1, \dots, u_n lineárně nezávislé, musí mít lineární systém

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = 0$$

pouze triviální řešení $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$. To nastane právě tehdy, když je čtvercová matice

$$U := (u_1^T \quad \dots \quad u_n^T),$$

jejíž sloupce jsou právě vektory u_1, \dots, u_n , regulární.

Tvrzení

Nechť jsou dány vektory $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ a nechť U je matice, jejíž sloupce jsou vektory u_1, \dots, u_n . Potom

u_1, \dots, u_n jsou lineárně nezávislé \Leftrightarrow matice U je regulární,

u_1, \dots, u_n jsou lineárně závislé \Leftrightarrow matice U je singulární.

Tvrzení

Nechť jsou dány vektory $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ a nechť U je matice, jejíž sloupce jsou vektory u_1, \dots, u_n . Potom

u_1, \dots, u_n jsou lineárně nezávislé \Leftrightarrow matice U je regulární,

u_1, \dots, u_n jsou lineárně závislé \Leftrightarrow matice U je singulární.

Příklad

Rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů

$$u_1 = (1, 2, 1)^T, u_2 = (-2, 1, 1)^T, u_3 = (0, 5, 3)^T.$$

Plán přednášky

- 1 Lineární závislost
- 2 Determinanty**
- 3 Věty Cauchyova a Laplaceova
- 4 Determinant a inverzní matice

V rovině \mathbb{R}^2 jsme pracovali s maticemi lineárních zobrazení a **determinant** matice A

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

prozrazoval, jestli umíme najít inverzi k A .

V rovině \mathbb{R}^2 jsme pracovali s maticemi lineárních zobrazení a **determinant** matice A

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

prozrazoval, jestli umíme najít inverzi k A .

Determinant byl užitečný i jinak: obsah rovnoběžníka by měl být lineárně závislý na každém ze dvou vektorů definujících rovnoběžník a je užitečné zároveň požadovat změnu znaménka při změně pořadí těchto vektorů. Protože tyto vlastnosti měl, až na pevný skalární násobek, jedině determinant, odvodili jsme, že je obsah dán právě takto.

V rovině \mathbb{R}^2 jsme pracovali s maticemi lineárních zobrazení a **determinant** matice A

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

prozrazoval, jestli umíme najít inverzi k A .

Determinant byl užitečný i jinak: obsah rovnoběžníka by měl být lineárně závislý na každém ze dvou vektorů definujících rovnoběžník a je užitečné zároveň požadovat změnu znaménka při změně pořadí těchto vektorů. Protože tyto vlastnosti měl, až na pevný skalární násobek, jedině determinant, odvodili jsme, že je obsah dán právě takto.

Nyní budeme takové číslo $\det A \in \mathbb{R}$ definovat pro libovolnou čtvercovou matici řádu n a ukážeme, že má právě ty vlastnosti, které jsme potřebovali výše.

Budeme pracovat s libovolnými skaláry \mathbb{K} a maticemi nad těmito skaláry (např. \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_k).

Budeme pracovat s libovolnými skaláry \mathbb{K} a maticemi nad těmito skaláry (např. \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_k).

Připomeňme, že bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá **permutace množiny** X . Je-li $X = \{1, 2, \dots, n\}$, lze permutace zapsat pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Budeme pracovat s libovolnými skaláry \mathbb{K} a maticemi nad těmito skaláry (např. \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_k).

Připomeňme, že bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá **permutace množiny** X . Je-li $X = \{1, 2, \dots, n\}$, lze permutace zapsat pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prvek $x \in X$ se nazývá **samodružným (pevným) bodem** permutace σ , je-li $\sigma(x) = x$.

Budeme pracovat s libovolnými skaláry \mathbb{K} a maticemi nad těmito skaláry (např. \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_k).

Připomeňme, že bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá **permutace množiny** X . Je-li $X = \{1, 2, \dots, n\}$, lze permutace zapsat pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prvek $x \in X$ se nazývá **samodružným (pevným) bodem** permutace σ , je-li $\sigma(x) = x$.

Permutace σ taková, že existují právě dva různé prvky $x, y \in X$ splňující $\sigma(x) = y, \sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro všechna ostatní $z \in X$ se nazývá **transpozice**, značíme ji (x, y) .

V dimenzi dva byl vzorec pro determinant jednoduchý – vezmeme všechny možné součiny dvou prvků, po jednom z každého sloupce a řádku matice, opatříme je znaménkem tak, aby při přehození dvou sloupců došlo ke změně celkového znaménka a tyto výrazy sečteme:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = ad - bc.$$

V dimenzi dva byl vzorec pro determinant jednoduchý – vezmeme všechny možné součiny dvou prvků, po jednom z každého sloupce a řádku matice, opatříme je znaménkem tak, aby při přehození dvou sloupců došlo ke změně celkového znaménka a tyto výrazy sečteme:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = ad - bc.$$

Obecně, necht' $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad \mathbb{K} .

Determinant matice A je skalár $\det A = |A|$ definovaný vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \dots, n\}$ a znaménko sgn pro každou permutaci ještě musíme popsat.

V dimenzi dva byl vzorec pro determinant jednoduchý – vezmeme všechny možné součiny dvou prvků, po jednom z každého sloupce a řádku matice, opatříme je znaménkem tak, aby při přehození dvou sloupců došlo ke změně celkového znaménka a tyto výrazy sečteme:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = ad - bc.$$

Obecně, nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad \mathbb{K} .

Determinant matice A je skalár $\det A = |A|$ definovaný vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \dots, n\}$ a znaménko sgn pro každou permutaci ještě musíme popsat.

Každý z výrazů $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ nazýváme **člen determinantu** $|A|$.

Jednoduché příklady už umíme: je-li $n = 1$, pak $|a_{11}| = a_{11} \in \mathbb{K}$, a pro $n = 2$ je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Jednoduché příklady už umíme: je-li $n = 1$, pak $|a_{11}| = a_{11} \in \mathbb{K}$, a pro $n = 2$ je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Podobně pro $n = 3$ se dá uhodnout (chceme linearitu v každém sloupci a antisymetrii)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Tomuto vzorci se říká **Sarrusovo pravidlo**.

Jak tedy najít správná znaménka? Říkáme, že dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \dots, n\}$ tvoří **inverzi v permutaci** σ , je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá **sudá** (resp. **lichá**), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.

Jak tedy najít správná znaménka? Říkáme, že dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \dots, n\}$ tvoří **inverzi v permutaci** σ , je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá **sudá** (resp. **lichá**), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.

Parita permutace σ je $(-1)^{\text{počet inverzí}}$ a značíme ji právě $\text{sgn}(\sigma)$.

Tolik definice, chceme ale vědět, jak s paritou počítat.

Z následujícího tvrzení už je jasné vidět, že Sarrusovo pravidlo skutečně počítá determinant v dimenzi 3.

Jak tedy najít správná znaménka? Říkáme, že dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \dots, n\}$ tvoří **inverzi v permutaci** σ , je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá **sudá** (resp. **lichá**), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.

Parita permutace σ je $(-1)^{\text{počet inverzí}}$ a značíme ji právě $\text{sgn}(\sigma)$.

Tolik definice, chceme ale vědět, jak s paritou počítat.

Z následujícího tvrzení už je jasné vidět, že Sarrusovo pravidlo skutečně počítá determinant v dimenzi 3.

Věta

Na množině $X = \{1, 2, \dots, n\}$ je právě $n!$ různých permutací. Tyto lze seřadit do posloupnosti tak, že každé dvě po sobě jdoucí se liší právě jednou transpozicí. Lze při tom začít libovolnou permutací a každá transpozice mění paritu.

Zjistili jsme, že provedení libovolné transpozice změní paritu permutace a že každé pořadí čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků. Důsledkem tohoto popisu je, že na každé množině $X = \{1, \dots, n\}$, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací.

Zjistili jsme, že provedení libovolné transpozice změní paritu permutace a že každé pořadí čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků. Důsledkem tohoto popisu je, že na každé množině $X = \{1, \dots, n\}$, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací.

Jestliže složíme dvě permutace za sebou, znamená to provést napřed všechny transpozice tvořící první a pak druhou. Proto pro libovolné permutace $\sigma, \eta : X \rightarrow X$ platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \eta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\eta), \quad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Zjistili jsme, že provedení libovolné transpozice změní paritu permutace a že každé pořadí čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků. Důsledkem tohoto popisu je, že na každé množině $X = \{1, \dots, n\}$, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací.

Jestliže složíme dvě permutace za sebou, znamená to provést napřed všechny transpozice tvořící první a pak druhou. Proto pro libovolné permutace $\sigma, \eta : X \rightarrow X$ platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \eta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\eta), \quad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Příklad

Napište permutaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

jako složení transpozic a určete její paritu.

Věta

Pro každou čtvercovou matici A platí

- 1 $|A^T| = |A|$,
- 2 *Je-li jeden řádek v A tvořen nulovými prvky z \mathbb{K} , pak $|A| = 0$,*
- 3 *Jestliže matice B vznikla z A výměnou dvou řádků, pak $|A| = -|B|$,*
- 4 *Jestliže matice B vznikla z A vynásobením řádku skalárem $a \in \mathbb{K}$, pak $|B| = a|A|$,*
- 5 *Jsou-li prvky k -tého řádku v A tvaru $a_{kj} = c_{kj} + b_{kj}$ a všechny ostatní řádky v maticích A , $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ jsou stejné, pak $|A| = |B| + |C|$,*
- 6 *Determinant $|A|$ se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku A lineární kombinaci ostatních řádků.*

Důsledkem prvního tvrzení předchozí věty o rovnosti determinantů matice a matice transponované je, že kdykoliv se nám podaří dokázat nějaké tvrzení o determinantech formulované s využitím řádků příslušné matice, pak analogické tvrzení platí i pro sloupce. Např. tedy můžeme okamžitě všechna tvrzení (2)–(6) této věty přeformulovat jako tvrzení o sloupcích matice.

Důsledkem prvního tvrzení předchozí věty o rovnosti determinantů matice a matice transponované je, že kdykoliv se nám podaří dokázat nějaké tvrzení o determinantech formulované s využitím řádků příslušné matice, pak analogické tvrzení platí i pro sloupce. Např. tedy můžeme okamžitě všechna tvrzení (2)–(6) této věty přeformulovat jako tvrzení o sloupcích matice. Vlastnosti (3)–(5) říkají, že determinant jako zobrazení, které n vektorům dimenze n (řádkům nebo sloupcům matice) přiřadí skalár je antisymetrické zobrazení lineární v každém svém argumentu, přesně jak jsme podle analogie z dimenze 2 požadovali.

Pro matici v řádkovém nebo sloupcovém schodovitém tvaru je jediným nenulovým členem determinantu ten, který odpovídá identické permutaci. Vidíme tedy, že determinant takové matice je $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$. Předchozí věta tedy poskytuje velice efektivní metodu výpočtu determinantů pomocí Gaussovy eliminační metody.

Plán přednášky

- 1 Lineární závislost
- 2 Determinanty
- 3 Věty Cauchyova a Laplaceova**
- 4 Determinant a inverzní matice

Věta (Cauchyova)

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou čtvercové matice dimenze n nad okruhem skalárů \mathbb{K} . Pak $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Věta (Cauchyova)

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou čtvercové matice dimenze n nad okruhem skalárů \mathbb{K} . Pak $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Časem uvidíme, že skutečně stejně jako v dimenzi dva je determinant matice roven orientovanému objemu rovnoběžnostěnu určeného jejími sloupci. Uvidíme také, že když uvážíme zobrazení $x \mapsto A \cdot x$ zadané čtvercovou maticí A na \mathbb{R}^n , pak můžeme determinant této matice vidět jako vyjádření poměru mezi objemem rovnoběžnostěnů daných vektory x_1, \dots, x_n a jejich obrazy $A \cdot x_1, \dots, A \cdot x_n$. Protože skládání zobrazení $x \mapsto A \cdot x \mapsto B \cdot (A \cdot x)$ odpovídá násobení matic, je **Cauchyova věta** docela pochopitelná.

Věta (Cauchyova)

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou čtvercové matice dimenze n nad okruhem skalárů \mathbb{K} . Pak $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Časem uvidíme, že skutečně stejně jako v dimenzi dva je determinant matice roven orientovanému objemu rovnoběžnostěnu určeného jejími sloupci. Uvidíme také, že když uvážíme zobrazení $x \mapsto A \cdot x$ zadané čtvercovou maticí A na \mathbb{R}^n , pak můžeme determinant této matice vidět jako vyjádření poměru mezi objemem rovnoběžnostěnů daných vektory x_1, \dots, x_n a jejich obrazy $A \cdot x_1, \dots, A \cdot x_n$. Protože skládání zobrazení $x \mapsto A \cdot x \mapsto B \cdot (A \cdot x)$ odpovídá násobení matic, je **Cauchyova věta** docela pochopitelná. My tuto větu odvodíme ryze algebraicky jako důsledek tzv. Laplaceovy věty o rozvoji. Ta bude vyžadovat zavedení několika nových pojmů.

Definice (Minory a algebraické doplňky matice)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n a $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$,
 $1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_\ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_\ell} \end{pmatrix}$$

typu k/ℓ nazýváme **submaticí matice** A určenou řádky i_1, \dots, i_k a sloupci j_1, \dots, j_ℓ .

Definice (Minory a algebraické doplňky matice)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n a $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$,
 $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_l} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_l} \end{pmatrix}$$

typu k/l nazýváme **submaticí matice** A určenou řádky i_1, \dots, i_k a sloupci j_1, \dots, j_l .

Zbývajícími $(m - k)$ řádky a $(n - l)$ sloupci je určena matice M^* typu $(m - k)/(n - l)$, která se nazývá **doplňková submatice** k M v A . Při $k = l$ je definován $|M|$, který nazýváme **subdeterminant** nebo **minor** řádu k matice A .

Definice (Minory a algebraické doplňky matice - pokračování)

Je-li $m = n$, pak při $k = \ell$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá doplněk minoru $|M|$, nebo doplňkový minor k submatici M v matici A . Skalár

$$(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá **algebraický doplněk** k minoru $|M|$. Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají **hlavní submatice**, jejich determinanty **hlavní minory** matice A .

Definice (Minory a algebraické doplňky matice - pokračování)

Je-li $m = n$, pak při $k = \ell$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá doplněk minoru $|M|$, nebo doplňkový minor k submatici M v matici A . Skalár

$$(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá **algebraický doplněk** k minoru $|M|$. Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají **hlavní submatice**, jejich determinanty **hlavní minory** matice A .

Při speciální volbě $k = \ell = 1$, $m = n$ hovoříme o **algebraickém doplňku** A_{ij} prvku a_{ij} matice A .

Lemma

Nechť A je čtvercová matice dimenze n a $|M|$ je její minor řádu $k < n$. Pak součin libovolného členu $|M|$ s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem $|A|$.

Lemma

Nechť A je čtvercová matice dimenze n a $|M|$ je její minor řádu $k < n$. Pak součin libovolného členu $|M|$ s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem $|A|$.

Toto tvrzení už předjímá, že by se pomocí takových součinů menších determinantů skutečně mohl determinant matic vyjadřovat. Víme, že $|A|$ obsahuje právě $n!$ různých členů, právě jeden pro každou permutaci.

Uvažované součiny $|M| \cdot |M^*|$ obsahují právě $\binom{n}{k} k!(n-k)! = n!$ různých členů z $|A|$, přitom pro různé výběry M dostáváme různé členy, a proto takto musí být vyjádřen právě $\det A$.

Tím jsme naznačili důkaz věty:

Věta (Laplaceova)

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad libovolným okruhem skalárů a necht' je pevně zvoleno k jejích řádků. Pak $|A|$ je součet všech $\binom{n}{k}$ součinů $(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k} \cdot |M| \cdot |M^|$ minorů řádu k vybraných ze zvolených řádků, s jejich algebraickými doplňky.*

Laplaceův rozvoj determinantu

Laplaceova věta převádí výpočet $|A|$ na výpočet determinantů nižšího stupně. Této metodě výpočtu se říká **Laplaceův rozvoj** podle zvolených řádků či sloupců. Např. rozvoj podle i -tého řádku nebo i -tého sloupce:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji} A_{ji}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplněk k prvku (minoru stupně 1) a_{ij} . Při praktickém počítání determinantů bývá výhodné kombinovat Laplaceův rozvoj s přímou metodou přičítání lineárních kombinací řádků či sloupců.

Důkaz Cauchyovy věty $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Uvažme matici H dimenze $2n$ (používáme tzv. blokovou symboliku, tj. píšeme matici jakoby složenou z matic)

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} =$$

Laplaceovým rozvojem podle prvních n řádků obdržíme

$$|H| = |A| \cdot |B|.$$

Důkaz Cauchyovy věty $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Nyní budeme k posledním n sloupcům H postupně přičítat lineární kombinace prvních n sloupců tak, abychom obdrželi matici s nulami v pravém dolním rohu. Dostaneme

$$K = \begin{pmatrix} A & A \cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy

$$|H| = |K| = (-1)^{n+1+\dots+2n} |A \cdot B| = (-1)^{2n \cdot (n+1)} \cdot |A \cdot B| = |A \cdot B|.$$

Plán přednášky

- 1 Lineární závislost
- 2 Determinanty
- 3 Věty Cauchyova a Laplaceova
- 4 **Determinant a inverzní matice**

Jiný výpočet inverzní matice

Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A , tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.

Jiný výpočet inverzní matice

Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A , tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.

Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a_{ij}^*)$, kde $a_{ij}^* = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A (všimněte si transponování!). Nazýváme ji **adjungovaná matice** k matici A .

Jiný výpočet inverzní matice

Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A , tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.

Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a_{ij}^*)$, kde $a_{ij}^* = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A (všimněte si transponování!). Nazýváme ji **adjungovaná matice** k matici A .

Věta

Pro každou čtvercovou matici A nad okruhem skalárů \mathbb{K} platí

$$AA^* = A^*A = |A| \cdot E.$$

Zejména tedy

- 1 A^{-1} existuje jako matice nad okruhem skalárů \mathbb{K} právě, když $|A|^{-1}$ existuje v \mathbb{K} .

2 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ $|A|^{-1} = |A^*|$

Důkaz.

Jak jsme již zmínili, Cauchyova věta ukazuje, že z existence A^{-1} vyplývá invertibilita $|A| \in \mathbb{K}$. Předpokládejme naopak, že $|A|$ je invertibilní skalár. Spočteme přímým výpočtem $A \cdot A^* = (c_{ij})$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}^* = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}.$$

Pokud $i = j$ je to právě Laplaceův rozvoj $|A|$ podle i -tého řádku. Pokud $i \neq j$ jde o rozvoj determinantu matice v níž je i -tý a j -tý řádek stejný a proto je $c_{ij} = 0$. Odtud plyne $A \cdot A^* = |A| \cdot E$, a tedy $A \cdot A^* = |A| \cdot E$. □

Příklad

Vypočtete inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad

Vypočtete inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

a tedy

$$A^{-1} = -A^* = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Důsledky předchozích tvrzení

Důsledek

- 1 A je *singulární* $\Leftrightarrow |A| = 0$.
- 2 Necht' U je matice, jejíž sloupce jsou vektory u_1^T, \dots, u_n^T . Pak vektory u_1, \dots, u_n jsou *lineárně závislé* $\Leftrightarrow |U| = 0$.

Důsledky předchozích tvrzení

Důsledek

- 1 A je *singulární* $\Leftrightarrow |A| = 0$.
- 2 Necht' U je matice, jejíž sloupce jsou vektory u_1^T, \dots, u_n^T . Pak vektory u_1, \dots, u_n jsou *lineárně závislé* $\Leftrightarrow |U| = 0$.

Věta (Kramerovo pravidlo)

Necht' A je regulární matice řádu n a $b \in \mathbb{R}^n$ a uvažujme systém lineárních rovnic $Ax = b$. Označme jako A_i matici, kterou získáme z matice A záměnou jejího i -tého sloupce za sloupec pravých stran b . Potom (jediné) řešení $x = (x_1, \dots, x_n)$ tohoto systému je dáno vztahem

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důkaz.

Zřejmě je $x = A^{-1}b$ jediným řešením tohoto systému. Podle vzorce pro výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované je

$$x = \frac{1}{|A|} A^* b,$$

neboli

$$\begin{aligned}x_i &= \frac{1}{|A|} \cdot (i\text{-tý prvek (sloupcového) vektoru } A^* b) \\&= \frac{1}{|A|} \cdot (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}) \\&= \frac{|A_i|}{|A|}.\end{aligned}$$



Poznámka

Kramerovo pravidlo je výhodné použít pro systémy s malým n (řekněme $n \leq 3$) nebo pro systémy, kde je v matici systému hodně nul.

Příklad

Vyřešte následující systém Kramerovým pravidlem:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -3, \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -3. \end{array}$$

Řešení

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dots = -28,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} \boxed{2} & 2 & 3 \\ \boxed{-3} & -3 & -1 \\ \boxed{-3} & 1 & 2 \end{vmatrix} = \dots = -28 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-28}{-28} = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 2 & \boxed{-3} & -1 \\ -3 & \boxed{-3} & 2 \end{vmatrix} = \dots = -56 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-56}{-28} = 2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{2} \\ 2 & -3 & \boxed{-3} \\ -3 & 1 & \boxed{-3} \end{vmatrix} = \dots = 28 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{28}{-28} = -1$$