

# Matematika I – 9. přednáška

## Euklidovské prostory, skalární součin

Michal Bulant

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

1. 4. 2009

# Obsah přednášky

- 1 Euklidovské prostory
- 2 Vektorové prostory se skalárním součinem
- 3 Ortogonalní podmnožiny a podprostory
  - Ortogonalní matice
  - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

# Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, e-text.
- Roman Hilscher – MB101, e-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

# Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, e-text.
- Roman Hilscher – MB101, e-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (<http://www.math.muni.cz/~horak>)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na <http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/>).

# Plán přednášky

- 1 Euklidovské prostory
- 2 Vektorové prostory se skalárním součinem
- 3 Ortogonalní podmnožiny a podprostory
  - Ortogonalní matice
  - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

# Euklidovské prostory

Do vektorového prostoru  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  nyní doplníme další strukturu, abychom dokázali odvodit více informací např. o vzájemné poloze vektorů, podprostorů, délce, vzdálenosti, úhlech, atd. Budeme zkoumat otázky typu

- Jak daleko leží nějaký bod od podprostoru?

# Euklidovské prostory

Do vektorového prostoru  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  nyní doplníme další strukturu, abychom dokázali odvodit více informací např. o vzájemné poloze vektorů, podprostorů, délce, vzdálenosti, úhlech, atd. Budeme zkoumat otázky typu

- Jak daleko leží nějaký bod od podprostoru?
- Který bod v podprostoru je nejbližší k nějakému zvolenému bodu (který leží mimo tento podprostor)?

# Skalární součin

Již dříve jsme definovali **skalární součin** dvou vektorů  $u, v \in \mathbb{R}^n$  jako číslo

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

(To lze zapsat i pomocí maticového násobení jako  $u^T \cdot v$ , pokud chápeme vektory v  $\mathbb{R}^n$  jako sloupcové vektory.) Evidentně platí vztah symetrie  $u \cdot v = v \cdot u$ .



# Skalární součin

Již dříve jsme definovali **skalární součin** dvou vektorů  $u, v \in \mathbb{R}^n$  jako číslo

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

(To lze zapsat i pomocí maticového násobení jako  $u^T \cdot v$ , pokud chápeme vektory v  $\mathbb{R}^n$  jako sloupcové vektory.) Evidentně platí vztah symetrie  $u \cdot v = v \cdot u$ .

Vektorový prostor  $\mathbb{R}^n$  s výše uvedeným skalárním součinem nazýváme **Euklidovský** (vektorový) **prostor**.

**Délka** (též **norma**) vektoru  $u \in \mathbb{R}^n$  je pak definována jako

$$\|u\| := \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

**Úhel** mezi dvěma nenulovými vektory  $u, v \in \mathbb{R}^n$  je číslo  $\varphi \in [0, \pi]$  splňující

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \varphi, \quad \text{tj.} \quad \cos \varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}.$$

To, že vůbec lze takto úhel dvou vektorů definovat (tj. že výraz napravo je číslo z intervalu  $[-1, 1]$ ) plyne z následující Cauchyovy (též Cauchy-Schwarzovy) nerovnosti.

### Věta (Cauchy-Schwarzova)

*Pro libovolné dva vektory  $u, v \in \mathbb{R}^n$  platí*

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|,$$

*přičemž rovnost nastane právě když jsou vektory  $u$  a  $v$  lineárně závislé (tj. jeden z nich je násobkem toho druhého).*

Cauchyovu nerovnost lze využít pro důkazy řady nerovností nebo pro odhady tzv. vázaných extrémů – více viz MB103.

Cauchyovu nerovnost lze využít pro důkazy řady nerovností nebo pro odhady tzv. vázaných extrémů – více viz MB103.

### Příklad

Určete minimální hodnotu, kterou nabývá funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2$  na přímce  $2x + 4y = 1$ .

Cauchyovu nerovnost lze využít pro důkazy řady nerovností nebo pro odhady tzv. vázaných extrémů – více viz MB103.

### Příklad

Určete minimální hodnotu, kterou nabývá funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2$  na přímce  $2x + 4y = 1$ .

### Řešení

Podle Cauchyovy nerovnosti aplikované na vektory  $(2, 4), (x, y) \in \mathbb{R}^2$  máme:

$$(2x + 4y)^2 \leq (2^2 + 4^2)(x^2 + y^2),$$

odkud již snadno dostaneme  $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$ . Rovnost přitom nastává, jsou-li zmíněné vektory lineárně závislé, tj. je-li  $x = 2t, y = 4t, t \in \mathbb{R}$ , odkud  $t = \frac{1}{20}$  a  $(x, y) = (\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$ .

# Kolmost vektorů

## Definice

Řekneme, že vektory  $u$  a  $v$  jsou navzájem **kolmé** (též **ortogonální**), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud  $u \cdot v = 0$ . Píšeme  $u \perp v$ . To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj.  $\cos \varphi = 0$ .

# Kolmost vektorů

## Definice

Řekneme, že vektory  $u$  a  $v$  jsou navzájem **kolmé** (též **ortogonální**), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud  $u \cdot v = 0$ . Píšeme  $u \perp v$ . To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj.  $\cos \varphi = 0$ .

## Příklad

(a) Nulový vektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  je kolmý na libovolný vektor  $u \in \mathbb{R}^n$ .

# Kolmost vektorů

## Definice

Řekneme, že vektory  $u$  a  $v$  jsou navzájem **kolmé** (též **ortogonální**), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud  $u \cdot v = 0$ . Píšeme  $u \perp v$ . To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj.  $\cos \varphi = 0$ .

## Příklad

- (a) Nulový vektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  je kolmý na libovolný vektor  $u \in \mathbb{R}^n$ .
- (b) Vektory  $(2, -1)$  a  $(1, 2)$  jsou kolmé.



# Kolmost vektorů

## Definice

Řekneme, že vektory  $u$  a  $v$  jsou navzájem **kolmé** (též **ortogonální**), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud  $u \cdot v = 0$ . Píšeme  $u \perp v$ . To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj.  $\cos \varphi = 0$ .

## Příklad

- (a) Nulový vektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  je kolmý na libovolný vektor  $u \in \mathbb{R}^n$ .
- (b) Vektory  $(2, -1)$  a  $(1, 2)$  jsou kolmé.
- (c) Vektory standardní báze  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  jsou navzájem kolmé, tj.  $e_i \perp e_j$  pro  $i \neq j$ .

# Kolmost vektorů

## Definice

Řekneme, že vektory  $u$  a  $v$  jsou navzájem **kolmé** (též **ortogonální**), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud  $u \cdot v = 0$ . Píšeme  $u \perp v$ . To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj.  $\cos \varphi = 0$ .

## Příklad

- (a) Nulový vektor  $0 \in \mathbb{R}^n$  je kolmý na libovolný vektor  $u \in \mathbb{R}^n$ .
- (b) Vektory  $(2, -1)$  a  $(1, 2)$  jsou kolmé.
- (c) Vektory standardní báze  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$  jsou navzájem kolmé, tj.  $e_i \perp e_j$  pro  $i \neq j$ .
- (d) Normálový vektor  $N$  roviny  $\rho \subseteq \mathbb{R}^3$  je kolmý na tuto rovinu, tj. na všechny vektory  $u$  ležící v rovině  $\rho$ .

# Ortogonalní podprostory v $\mathbb{R}^n$

Kolmost podprostorů prostoru  $\mathbb{R}^n$  definujeme stejně jako kolmost jednotlivých vektorů, jen musí být příslušný skalární součin nulový pro všechny vektory z daných podprostorů.

## Definice

**Podprostory**  $X$  a  $Y$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  jsou navzájem **kolmé** (též **ortogonalní**), pokud

$$u \perp v \quad (\text{tj. } u \cdot v = 0) \quad \text{pro všechny vektory } u \in X, v \in Y.$$

# Ortogonalní doplněk v $\mathbb{R}^n$

## Definice

Je-li  $Y$  podprostor Euklidovského prostoru  $\mathbb{R}^n$ , potom se množina

$$Y^\perp := \{u \in \mathbb{R}^n, u \perp v \text{ pro všechny vektory } v \in Y\}$$

nazývá **ortogonalní komplement (doplněk)** podprostoru  $Y$  (v prostoru  $\mathbb{R}^n$ ).

$Y^\perp$  je tedy množina všech vektorů, které jsou kolmé na všechny vektory v podprostoru  $Y$ .

# Ortogonalní doplněk v $\mathbb{R}^n$

## Definice

Je-li  $Y$  podprostor Euklidovského prostoru  $\mathbb{R}^n$ , potom se množina

$$Y^\perp := \{u \in \mathbb{R}^n, u \perp v \text{ pro všechny vektory } v \in Y\}$$

nazývá **ortogonalní komplement (doplněk)** podprostoru  $Y$  (v prostoru  $\mathbb{R}^n$ ).

$Y^\perp$  je tedy množina všech vektorů, které jsou kolmé na všechny vektory v podprostoru  $Y$ .

## Příklad

(a) Pro  $V = \langle e_2, e_3 \rangle$  je

$$\begin{aligned} V^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3, x \perp v \text{ pro všechny vektory } v \in V\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3, x \cdot (0, v_2, v_3) = 0 \text{ pro všechny } v_2, v_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3, x = (x_1, 0, 0), x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle e_1 \rangle = X. \end{aligned}$$

## Příklad

(b) Podobně platí

$$X^\perp = \langle e_2, e_3 \rangle = V, \quad Z^\perp = \langle e_1, e_2 \rangle = U.$$

- (c) Všimněte si, že ačkoliv  $X \perp Z$ , není podprostor  $Z$  ortogonální doplněk prostoru  $X$  (a naopak).
- (d) Triviální podprostory  $\{0\}$  a  $\mathbb{R}^n$  tvoří navzájem ortogonální doplňky, tj.

$$\{0\}^\perp = \mathbb{R}^n, \quad (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}.$$

Tyto vztahy zřejmě interpretujeme tak, že nulový vektor je kolmý ke všem vektorům a že jediný vektor, který je kolmý ke všem vektorům, je právě nulový vektor.

Evidentně pro libovolný podprostor  $Y$  platí, že  $Y \perp Y^\perp$ . Ovšem pokud  $Y \perp Z$ , neplyne z toho nutně, že  $Z = Y^\perp$ . Množina  $Y^\perp$  může zřejmě být větší, než je množina  $Z$ . V tomto případě ale vždy platí inkluze  $Z \subseteq Y^\perp$ .

### Věta

*Nechť  $X$  a  $Y$  jsou podprostory Euklidovského prostoru  $\mathbb{R}^n$ .*

- (i) Je-li  $X \perp Y$ , potom je  $X \cap Y = \{0\}$ .*
- (ii)  $Y^\perp$  (a samozřejmě i  $X^\perp$ ) je také podprostor prostoru  $\mathbb{R}^n$ .*

### Důkaz.

Snadný. □

Je zřejmé, že se vektory z podprostoru  $Y$  a z podprostoru  $Y^\perp$  navzájem doplňují v tom smyslu, že dohromady vyčerpají celý prostor  $\mathbb{R}^n$ .



Je zřejmé, že se vektory z podprostoru  $Y$  a z podprostoru  $Y^\perp$  navzájem doplňují v tom smyslu, že dohromady vyčerpají celý prostor  $\mathbb{R}^n$ .

### Věta

*Je-li  $Y$  podprostor Euklidovského prostoru  $\mathbb{R}^n$ , potom*

$$\dim Y + \dim Y^\perp = n.$$

*Zejména, pokud  $\dim Y = k$  a  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k)$  je báze podprostoru  $Y$  a  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n-k})$  je báze podprostoru  $Y^\perp$ , potom je*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k})$$

*báze celého prostoru  $\mathbb{R}^n$ .*

## Poznámka

Z věty vyplývá, že každý vektor  $w \in \mathbb{R}^n$  lze **jednoznačně** zapsat jako lineární kombinaci

$$w = \underbrace{a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k}_{=: y \in Y} + \underbrace{a_{k+1} v_1 + \cdots + a_n v_{n-k}}_{=: z \in Y^\perp} = y + z,$$

kde  $y \in Y$  a  $z \in Y^\perp$ . Tato dekompozice vektoru  $w$  je **jednoznačná**, protože  $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}$  tvoří **bázi** prostoru  $\mathbb{R}^n$  (souřadnice vzhledem k této bázi jsou určeny jednoznačně).

## Poznámka

Z věty vyplývá, že každý vektor  $w \in \mathbb{R}^n$  lze **jednoznačně** zapsat jako lineární kombinaci

$$w = \underbrace{a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k}_{=: y \in Y} + \underbrace{a_{k+1} v_1 + \cdots + a_n v_{n-k}}_{=: z \in Y^\perp} = y + z,$$

kde  $y \in Y$  a  $z \in Y^\perp$ . Tato dekompozice vektoru  $w$  je **jednoznačná**, protože  $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}$  tvoří **bázi** prostoru  $\mathbb{R}^n$  (souřadnice vzhledem k této bázi jsou určeny jednoznačně).

Přímým důsledkem předchozí věty je tedy

## Důsledek

*Je-li  $Y$  podprostor Euklidovského prostoru  $\mathbb{R}^n$ , potom je  $\mathbb{R}^n$  přímý součet podprostorů  $Y$  a  $Y^\perp$ , tj.*

$$\mathbb{R}^n = Y \oplus Y^\perp.$$

# Plán přednášky

- 1 Euklidovské prostory
- 2 Vektorové prostory se skalárním součinem
- 3 Ortogonalní podmnožiny a podprostory
  - Ortogonalní matice
  - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

# Skalární součin

Hlavní myšlenka obecných vektorových prostorů se skalárním součinem je zobecnit skalární součin z prostoru  $\mathbb{R}^n$  tak, aby bylo možno přirozeným způsobem pracovat s příslušnými vlastnostmi (délka, kolmost, úhel atd.) v libovolných vektorových prostorech.

# Skalární součin

Hlavní myšlenka obecných vektorových prostorů se skalárním součinem je zobecnit skalární součin z prostoru  $\mathbb{R}^n$  tak, aby bylo možno přirozeným způsobem pracovat s příslušnými vlastnostmi (délka, kolmost, úhel atd.) v libovolných vektorových prostorech.

## Definice

Bud'  $(V, +, \cdot)$  vektorový prostor. Zobrazení  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme **skalární součin** (též **vnitřní součin** z angl. inner product) na prostoru  $V$ , pokud má následující vlastnosti:

(i) je tzv. **pozitivně definitní**, tj.

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \quad \text{přičemž} \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

(ii) je **symetrické**, tj.  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ,

(iii) je **lineární v první složce**, tj.

$$\langle a \cdot u + b \cdot v, w \rangle = a \cdot \langle u, w \rangle + b \cdot \langle v, w \rangle.$$

## Příklad

(a) V prostoru  $\mathbb{R}^n$  můžeme zvolit

$$\langle u, v \rangle := u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (\text{obvyklý skalární součin}),$$

případně pro pevně zvolená kladná čísla  $w_1, \dots, w_n$  lze

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^n w_i u_i v_i \quad (\text{skalární součin s vahou } w_1, \dots, w_n).$$

## Příklad

(a) V prostoru  $\mathbb{R}^n$  můžeme zvolit

$$\langle u, v \rangle := u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (\text{obvyklý skalární součin}),$$

případně pro pevně zvolená kladná čísla  $w_1, \dots, w_n$  lze

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^n w_i u_i v_i \quad (\text{skalární součin s vahou } w_1, \dots, w_n).$$

(b) V prostoru  $\text{Mat}_{m \times n}$  můžeme zvolit

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Tj. vynásobíme prvky na stejných pozicích a výsledné součiny sečteme.



## Příklad

(c) viz později v MB102 – v prostoru  $C[a, b]$  spojitých funkcí na intervalu  $[a, b]$  můžeme zvolit

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

případně pro vážený spojitou funkcí  $w(x) > 0$ .

## Příklad

- (c) viz později v MB102 – v prostoru  $C[a, b]$  spojitých funkcí na intervalu  $[a, b]$  můžeme zvolit

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

případně pro vážený spojitou funkcí  $w(x) > 0$ .

- (d) Zvolme  $n + 1$  různých bodů  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Potom v prostoru polynomů stupně nejvýše  $n$  můžeme zvolit

$$\langle p, q \rangle := \sum_{i=0}^n p(x_i) q(x_i).$$

Případně opět váženo  $w_0, w_1, \dots, w_n$ .

## Příklad

- (c) viz později v MB102 – v prostoru  $C[a, b]$  spojitých funkcí na intervalu  $[a, b]$  můžeme zvolit

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

případně pro vážený spojitou funkcí  $w(x) > 0$ .

- (d) Zvolme  $n + 1$  různých bodů  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Potom v prostoru polynomů stupně nejvýše  $n$  můžeme zvolit

$$\langle p, q \rangle := \sum_{i=0}^n p(x_i) q(x_i).$$

Případně opět váženo  $w_0, w_1, \dots, w_n$ .

- (e) Na vektorovém prostoru všech funkcí  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  skalární součin definovat nelze. (Dokonce zde nelze definovat ani normu, tj. prostor není ani tzv. normovaný prostor, viz dále.)

# Délka (norma) vektoru

## Definice

Skalární součin  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definuje přirozeným způsobem **normu** (též **délku**) každého vektoru  $u \in V$  předpisem:

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

# Délka (norma) vektoru

## Definice

Skalární součin  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definuje přirozeným způsobem **normu** (též **délku**) každého vektoru  $u \in V$  předpisem:

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

## Příklad

(a) V prostoru  $\mathbb{R}^n$  s obvyklým skalárním součinem je

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad \text{kde } u = (x_1, \dots, x_n).$$

Tuto normu budeme nazývat **Euklidovská norma** prostoru  $\mathbb{R}^n$  a značit s indexem 2, tj.

$$\|u\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

## Příklad

(b) Tzv. **Frobeniova norma** v prostoru  $\text{Mat}_{m \times n}$  je definována jako

$$\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

## Příklad

- (b) Tzv. **Frobeniova norma** v prostoru  $\text{Mat}_{m \times n}$  je definována jako

$$\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

- (c) viz MB102 – tzv.  **$L^2$ -norma** v prostoru  $C[a, b]$  je definována jako

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Podobně jako v prostoru  $\mathbb{R}^n$  i v libovolném vektorovém prostoru se skalárním součinem platí Cauchyova nerovnost.

### Věta (Cauchy-Schwarzova)

*Je-li  $V$  vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva vektory  $u, v \in V$  platí*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

*přičemž rovnost nastane právě když jsou vektory  $u$  a  $v$  lineárně závislé (tj. jeden z nich je násobkem toho druhého).*



Podobně jako v prostoru  $\mathbb{R}^n$  i v libovolném vektorovém prostoru se skalárním součinem platí Cauchyova nerovnost.

### Věta (Cauchy-Schwarzova)

*Je-li  $V$  vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva vektory  $u, v \in V$  platí*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

*přičemž rovnost nastane právě když jsou vektory  $u$  a  $v$  lineárně závislé (tj. jeden z nich je násobkem toho druhého).*

### Definice

Na základě Cauchyovy nerovnosti definujeme **úhel** (též **odchylka**) mezi dvěma vektory  $u$  a  $v$  jako číslo  $\varphi \in [0, \pi]$  splňující

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

# Pythagorova věta

## Věta

*Je-li  $V$  vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva vektory  $u, v \in V$ ,  $u \perp v$ , platí*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

# Pythagorova věta

## Věta

*Je-li  $V$  vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva vektory  $u, v \in V$ ,  $u \perp v$ , platí*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

## Důkaz.

Důkaz je snadný, neboť

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0} + \langle v, v \rangle = \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2.\end{aligned}$$



# Normované vektorové prostory

Viděli jsme, že norma vektoru je přirozeným způsobem dána skalárním součinem. Na daném vektorovém prostoru ovšem mohou existovat i další normy, které např nemusejí pocházet z nějakého skalárního součinu. Případně taková norma může být korektně definována na vektorovém prostoru, na kterém skalární součin definovat nelze.

# Normované vektorové prostory

Viděli jsme, že norma vektoru je přirozeným způsobem dána skalárním součinem. Na daném vektorovém prostoru ovšem mohou existovat i další normy, které např nemusejí pocházet z nějakého skalárního součinu. Případně taková norma může být korektně definována na vektorovém prostoru, na kterém skalární součin definovat nelze.

## Definice

Bud'  $(V, +, \cdot)$  vektorový prostor. Zobrazení  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme **norma** (též **délka**), pokud má následující vlastnosti:

(i) je tzv. **pozitivně definitní**, tj.

$$\|u\| \geq 0, \quad \text{přičemž} \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

(ii) je **pozitivně homogenní**, tj.  $\|a \cdot u\| = |a| \cdot \|u\|$ ,

(iii) splňuje **trojúhelníkovou nerovnost**, tj.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

Norma na prostoru  $V$  tedy přiřazuje každému vektoru  $u \in V$  (objektům z prostoru  $V$ ) reálné číslo  $\|u\|$ . Ověřte si, že norma definovaná pomocí skalárního součinu splňuje výše uvedené vlastnosti normy.

Jak uvidíme níže, na některých vektorových prostorech lze definovat více (i nekonečně mnoho) různých norem  $\|\cdot\|$ , zatímco na jiných prostorech normu vůbec definovat nelze. Vektorový prostor  $V$ , na kterém je definována (nějaká) norma pak nazýváme **normovaný vektorový prostor**.

Norma na prostoru  $V$  tedy přiřazuje každému vektoru  $u \in V$  (objektům z prostoru  $V$ ) reálné číslo  $\|u\|$ . Ověřte si, že norma definovaná pomocí skalárního součinu splňuje výše uvedené vlastnosti normy.

Jak uvidíme níže, na některých vektorových prostorech lze definovat více (i nekonečně mnoho) různých norem  $\|\cdot\|$ , zatímco na jiných prostorech normu vůbec definovat nelze. Vektorový prostor  $V$ , na kterém je definována (nějaká) norma pak nazýváme **normovaný vektorový prostor**.

Viděli jsme některé normy, které jsou na daném vektorovém prostoru indukovány skalárním součinem. Následující příklady jsou také normy na příslušných prostorech (ale tyto normy už nejsou indukovány skalárním součinem).

## Příklad

- 1 V prostoru  $\mathbb{R}^n$  můžeme definovat např. následující normy: pro  $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|u\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{tzv. 1-norma,}$$

$$\|u\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{tzv. stejnoměrná norma,}$$

$$\|u\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{tzv. } p\text{-norma (pro } p \geq 1\text{).}$$

Norma  $\|\cdot\|_2$  uvedená v předchozím příkladu je speciálním případem  $p$ -normy pro  $p = 2$ . Jako jediná je odvozena ze skalárního součinu. Norma  $\|\cdot\|_1$  je zřejmě také  $p$ -norma pro  $p = 1$ . V prostorech s normou  $\|\cdot\|_p$  s  $p \neq 2$  ale např. neplatí Pythagorova věta. Obdobně lze  $p$ -normu nebo stejnoměrnou normu definovat i pro prostor matic nebo spojitých funkcí.



# Plán přednášky

- 1 Euklidovské prostory
- 2 Vektorové prostory se skalárním součinem
- 3 Ortogonalní podmnožiny a podprostory
  - Ortogonalní matice
  - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

# Ortogonalní množina vektorů

## Definice

Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Množina vektorů  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$  se nazývá **ortogonalní množina** vektorů, pokud  $u_i \perp u_j$  pro všechny indexy  $i \neq j$ .

# Ortogonalní množina vektorů

## Definice

Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Množina vektorů  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$  se nazývá **ortogonalní množina** vektorů, pokud  $u_i \perp u_j$  pro všechny indexy  $i \neq j$ .

## Věta

*Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Potom jsou nenulové vektory v libovolné ortogonalní množině prostoru  $V$  lineárně nezávislé.*

# Ortogonalní množina vektorů

## Definice

Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Množina vektorů  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$  se nazývá **ortogonalní množina** vektorů, pokud  $u_i \perp u_j$  pro všechny indexy  $i \neq j$ .

## Věta

*Nechť  $V$  je vektorový prostor se skalárním součinem  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Potom jsou nenulové vektory v libovolné ortogonalní množině prostoru  $V$  lineárně nezávislé.*

## Důkaz.

Snadný: je-li  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$  ortogonalní, pak z  $a_1 u_1 + \dots + a_k u_k = 0$  dostaneme skalárním vynásobením s vektorem  $u_j$  (pro libovolné  $j$ )

$a_1 \langle u_1, u_j \rangle + \dots + a_j \langle u_j, u_j \rangle + \dots + a_k \langle u_k, u_j \rangle = \langle 0, u_j \rangle = 0$ , a tedy  $a_j \|u_j\|^2 = 0$ , odkud  $a_j = 0$ . □

## Definice

Ortogonalní množina vektorů  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$  se nazývá **ortonormální množina**, pokud mají všechny vektory  $u_i$  velikost 1, tj.  $\|u_i\| = 1$ .

## Definice

Ortogonalní množina vektorů  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$  se nazývá **ortonormální množina**, pokud mají všechny vektory  $u_i$  velikost 1, tj.  $\|u_i\| = 1$ .

## Poznámka

Zřejmě platí jednoduché tvrzení, že z každé orthogonalní množiny lze vytvořit množinu ortonormální, protože stačí každý vektor znormalizovat, tj. místo množiny  $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$  vzít množinu

$$\left\{ \frac{1}{\|u_1\|} u_1, \dots, \frac{1}{\|u_k\|} u_k \right\}.$$

## Příklad (Fourierova analýza)

Ve vektorovém prostoru  $C[-L, L]$  uvažujme skalární součin

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot g(x) dx \quad \text{tj. váhová funkce je } w(x) \equiv \frac{1}{L}.$$

Potom množina funkcí

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

tvoří **ortonormální** množinu.

# Ortonormální báze

Proč je výhodné pracovat ve vektorovém prostoru se skalárním součinem s ortonormální bází ukazují následující tvrzení.

## Věta

*Je-li  $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$  ortonormální báze vektorového prostoru  $V$ , potom jsou souřadnice libovolného vektoru  $w \in V$  v bázi  $\underline{u}$  dány pomocí skalárního součinu vektoru  $w$  s bázovými vektory  $u_i$ , tj.*

$$[w]_{\underline{u}} = (a_1, \dots, a_n)^T, \quad \text{kde} \quad a_i = \langle w, u_i \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$



# Ortonormální báze

Proč je výhodné pracovat ve vektorovém prostoru se skalárním součinem s ortonormální bází ukazují následující tvrzení.

## Věta

*Je-li  $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$  ortonormální báze vektorového prostoru  $V$ , potom jsou souřadnice libovolného vektoru  $w \in V$  v bázi  $\underline{u}$  dány pomocí skalárního součinu vektoru  $w$  s bázovými vektory  $u_i$ , tj.*

$$[w]_{\underline{u}} = (a_1, \dots, a_n)^T, \quad \text{kde} \quad a_i = \langle w, u_i \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

## Důsledek

*Skalární součin dvou libovolných vektorů  $v, w \in V$ , kde  $\dim V = n$ , je roven skalárnímu součinu vektorů jejich souřadnic (v  $\mathbb{R}^n$ ) vzhledem k nějaké ortonormální bázi  $\underline{u}$  prostoru  $V$ , tj.*

$$\langle v, w \rangle_V = \langle [v]_{\underline{u}}, [w]_{\underline{u}} \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

# Ortogonalní matice

## Definice

Čtvercová matice  $Q$  řádu  $n$  je **ortogonalní** matice, pokud její sloupce tvoří ortonormální množinu vektorů v  $\mathbb{R}^n$ , tj. pokud platí

$$Q^T Q = I, \quad \text{tj.} \quad Q^{-1} = Q^T.$$

# Ortogonalní matice

## Definice

Čtvercová matice  $Q$  řádu  $n$  je **ortogonalní** matice, pokud její sloupce tvoří ortonormální množinu vektorů v  $\mathbb{R}^n$ , tj. pokud platí

$$Q^T Q = I, \quad \text{tj.} \quad Q^{-1} = Q^T.$$

## Poznámka

Ze vztahu  $Q^T Q = I$  plyne, že každá ortogonalní matice je regulární a že determinant každé ortogonalní matice je buď 1 nebo  $-1$ , neboť

$$1 = |I| = |Q^T Q| = |Q^T| \cdot |Q| = |Q|^2.$$

## Příklad

(a) Matice rotace v  $\mathbb{R}^2$  o úhel  $\varphi$  v kladném směru

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice a tedy platí

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

## Příklad

(a) Matice rotace v  $\mathbb{R}^2$  o úhel  $\varphi$  v kladném směru

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice a tedy platí

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

(b) Tzv. **permutační matice** jsou ortogonální, např.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Permutační matice vzniknou z jednotkové matice  $I$  tak, že se přehážou její řádky (nebo sloupce)

## Věta

*Je-li  $Q$  ortogonální matice řádu  $n$ , potom platí*

$$\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pro všechny vektory } x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \text{pro všechny vektory } x \in \mathbb{R}^n.$$

## Důkaz.

Plyne snadno z předchozích tvrzení. □

## Věta

*Je-li  $Q$  ortogonální matice řádu  $n$ , potom platí*

$$\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{pro všechny vektory } x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \text{pro všechny vektory } x \in \mathbb{R}^n.$$

## Důkaz.

Plyne snadno z předchozích tvrzení. □

## Poznámka

Z předchozího plyne jako velmi speciální případ intuitivně zřejmé tvrzení, že rotací v  $\mathbb{R}^2$  se nemění délka vektorů.

# Projekce vektoru na podprostor

## Věta

*Nechť  $W$  je podprostor vektorového prostoru  $V$  a nechť je dán vektor  $v \in V$ . Je-li  $\underline{u} = (u_1, \dots, u_k)$  ortonormální báze podprostoru  $W$ , potom má vektor  $p \in W$ , který je nejbližší k vektoru  $v$ , tvar*

$$p = a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k, \quad \text{kde} \quad a_i = \langle v, u_i \rangle, \quad i = 1, \dots, k.$$

*Platí tedy, že*

$$[p]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_k \rangle \end{pmatrix}.$$



## Důkaz.

Protože je  $V = W \oplus W^\perp$ , můžeme vektor  $v$  napsat jediným způsobem jako součet

$$v = p + w, \quad \text{kde } p \in W, \quad w \in W^\perp.$$

Protože jsou bázové vektory  $u_i \in W$ , je  $u_i \perp w$ , tj.  $\langle u_i, w \rangle = 0$   
 $\forall i = 1, \dots, k$ .

## Důkaz.

Protože je  $V = W \oplus W^\perp$ , můžeme vektor  $v$  napsat jediným způsobem jako součet

$$v = p + w, \quad \text{kde } p \in W, \quad w \in W^\perp.$$

Protože jsou bázové vektory  $u_i \in W$ , je  $u_i \perp w$ , tj.  $\langle u_i, w \rangle = 0$   $\forall i = 1, \dots, k$ .

Na druhou stranu, vektor  $p \in W$  můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů  $u_1, \dots, u_k$ , tj.

$$p = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k,$$

odkud již plyne vztah

$$\begin{aligned} \langle v, u_i \rangle &= \langle p, u_i \rangle + \underbrace{\langle w, u_i \rangle}_{=0} = a_1 \langle u_1, u_i \rangle + \dots + a_k \langle u_k, u_i \rangle \\ &= a_i \langle u_i, u_i \rangle = a_i \|u_i\|^2 = a_i \quad \forall i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

## Poznámka

Z důkazu plyne, že pokud by báze podprostoru  $W$  nebyla ortonormální, ale jen **ortogonalní**, potom pro koeficienty  $a_i$  ve vyjádření projekce  $p$  platí

$$a_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2}.$$

Tedy projekce  $p$  vektoru  $v$  na podprostor  $W$  je pak tvaru

$$p = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \cdot u_k.$$

# Vzdálenost a odchylna vektoru od podprostoru

## Definice

Číslo  $v(v, W) := \|v - p\|$  nazýváme **vzdálenost** vektoru  $v$  od podprostoru  $W$ . **Odchylna** vektoru  $v$  od podprostoru  $W$  je definována jako úhel, který svírá vektor  $v$  se svou projekcí  $p$  na podprostor  $W$ , tj. je to úhel  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , pro který je

$$\cos \varphi = \frac{\|p\|}{\|v\|}.$$

# Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

V předchozím jsme viděli, že pro nalezení projekce daného vektoru  $v$  na podprostor  $W$  potřebujeme znát ortonormální bázi podprostoru  $W$ . V tomto odstavci si ukážeme, jak z **libovolné** báze podprostoru  $W$  zkonstruovat bázi ortogonální (a poté bázi ortonormální). Tento proces se nazývá **Gram-Schmidtův ortogonalizační proces**.

Pro popis tohoto ortogonalizačního procesu není zřejmě potřeba se omezovat na báze a podprostor  $W$ , ale můžeme uvažovat libovolnou množinu lineárně nezávislých vektorů v prostoru  $V$ .

# Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

V předchozím jsme viděli, že pro nalezení projekce daného vektoru  $v$  na podprostor  $W$  potřebujeme znát ortonormální bázi podprostoru  $W$ . V tomto odstavci si ukážeme, jak z **libovolné** báze podprostoru  $W$  zkonstruovat bázi ortogonální (a poté bázi ortonormální). Tento proces se nazývá **Gram-Schmidtův ortogonalizační proces**.

Pro popis tohoto ortogonalizačního procesu není zřejmě potřeba se omezovat na báze a podprostor  $W$ , ale můžeme uvažovat libovolnou množinu lineárně nezávislých vektorů  $v$  v prostoru  $V$ . Necht' jsou tedy dány lineárně nezávislé vektory  $u_1, \dots, u_n \in V$ . V první fázi najdeme **ortogonální** množinu vektorů  $v_1, \dots, v_n$  takovou, že

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle u_1, \dots, u_n \rangle,$$

tj. ortogonální vektory  $v_1, \dots, v_n$  generují stejný podprostor jako původní vektory  $u_1, \dots, u_n$ .

## Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

1. Položme  $v_1 := u_1$ , tj. první vektor se nemění.

## Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

1. Položme  $v_1 := u_1$ , tj. první vektor se nemění.
2. Najděme projekci  $p_1$  vektoru  $u_2$  na podprostor  $W := \langle v_1 \rangle$ .  
Podle předchozího je

$$p_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1.$$

Potom vektor

$$v_2 := u_2 - p_1 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1$$

splňuje podmínky  $v_2 \perp v_1$  a  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ .



## Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

- k.* Pokud již máme zkonstruovány ortogonální vektory  $v_1, \dots, v_k$  takové, že

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle,$$

pak najděme projekci  $p_k$  vektoru  $u_{k+1}$  na podprostor  $W := \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ . Tou je

$$p_k = \frac{\langle u_{k+1}, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 + \dots + \frac{\langle u_{k+1}, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} \cdot v_k.$$

Potom je vektor

$$\boxed{v_{k+1} := u_{k+1} - p_k} = u_{k+1} - \frac{\langle u_{k+1}, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 - \dots - \frac{\langle u_{k+1}, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} \cdot v_k$$

kolmý na všechny předchozí vektory  $v_1, \dots, v_k$  a splňuje podmínku

$$\langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k+1} \rangle.$$

## Příklad

Určete ortonormální bázi podprostoru  $W = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ ,  
přičemž

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a následně projekci vektoru

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

na podprostor  $W$ , vzdálenost vektoru  $v$  od podprostoru  $W$  a  
odchylku vektoru  $v$  od podprostoru  $W$ .