Matematika 1 **A**
27. května 2009 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr (max. 15b.)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
0							

Potřebné minimum (**včetně bodů ze semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

---

1. (5 bodů) V loterii je taženo 5 čísel z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 35\}$, přitom nezáleží na jejich pořadí. Sázející tipuje 5 čísel a vyhrává 1. cenu, pokud všechna uhodne, 2. cenu, pokud tipuje správně 4 čísla a 3. cenu, jestliže správně uhodne 3 čísla. Definujte význam kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ a pomocí kombinačních čísel vyjádřete pravděpodobnost:

(a) získání 1. ceny;
(b) toho, že všechna tažená čísla budou lichá;
(c) toho, že alespoň 2 tažená čísla budou sudá;
(d) získání 3. ceny.

2. (6 bodů) Určete vzdálenost rovin $\sigma : [4, 5, 3, 2] + t(1, 2, 2, 2) + s(2, 0, 2, 1)$ a $\tau : [1, -2, 1, -3] + r(2, -2, 1, 2) + p(1, -2, 0, -1)$ v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^4$.

3. (4 body) Uvažte vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{2\times2}$ čtvercových matic řádu 2 a v něm množinu V těch matic, které mají nulový součet prvků v každém řádku i v každém sloupci. Rozhodněte (a zdůvodněte!), je-li V vektorovým podprostorem v $\mathrm{Mat}_{2\times2}$ a pokud ano, určete jeho bázi a dimenzi.

4. (6 bodů) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -4 \\ -5 & -7 & 3 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určete algebraickou a geometrickou násobnost všech vlastních hodnot a uveďte, je-li matice M podobná nějaké diagonální matici. Pokud ano, uveďte takovou matici a matici podobnosti.

5. (4 body) Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a (obecná) matice B řádu 3, o níž víme, že $|B| = -3$. Určete determinanty matic $A \cdot B, A^{-1}, B^{-1} \cdot A, A^2, B^2, B^T \cdot A^T$.

6. (4 body) Uveďte všechny podmínky pro to, aby byla relace R relací (neostrého) uspořádání a u následujících relací na množině $\{a, b, c, d\}$ rozhodněte, zda je R uspořádání a dále, zda je R relací ekvivalence.

(a) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [d, a], [a, d]\}$,
(b) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, a], [a, b], [b, c], [c, b]\}$,
(c) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [a, b], [a, c], [a, d], [b, c], [b, d], [c, d]\}$.

Matematika 1 **B**
27. května 2009 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr (max. 15b.)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
0							

Potřebné minimum (**včetně bodů ze semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

---

1. (5 bodů) Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 9.00 a 10.00 (okamžiky příchodu jsou nezávislé a stejně možné během celého intervalu). Určete pravděpodobnost, že:

(a) první z příchozích nebude muset na druhého čekat déle než 10 minut,

(b) osoba Y přijde až jako druhá, jestliže přijde po 9.30.

2. (5 bodů) V $\mathbb{R}^3$ určete obecnou rovnici roviny určené bodem $A = [1, 1, 1]$ a přímkou p : $[-1, 1, 1] + t(1, 2, 3)$.

3. (6 bodů) V populačním modelu dravec-kořist je vztah mezi počtem lišek (L_k) a králíků (K_k) v daném a následujícím měsíci dán rovnostmi

$$L_{k+1} = 0,5L_k + 0,5K_k$$
$$K_{k+1} = -0,2L_k + 1,2K_k,$$

přitom na počátku je ve zkoumané oblasti 50 lišek a 80 králíků. Pomocí výpočtu vlastních hodnot a vektorů matice systému analyzujte limitní chování tohoto modelu.

4. (5 bodů) Vyčíslete hodnotu determinantu matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. (5 bodů) V $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory

$$U = \langle (1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1) \rangle, \qquad V = \langle (2, -1, 0, 1), (1, -1, 3, 7) \rangle.$$

Najděte bázi prostoru $U \cap V$ a určete dimenzi součtu $U + V$.

6. (4 body) Uveďte všechny podmínky pro to, aby byla relace R ekvivalencí a u následujících relací na množině $\{a, b, c, d\}$ rozhodněte, zda je R ekvivalence a dále, zda je R relací uspořádání.

(a) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, a], [b, c], [b, d]\}$,

(b) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$,

(c) $R = \{[a, a], [b, b], [c, c], [b, a], [a, b], [b, c], [c, b], [a, c], [c, a]\}$.