Matematika 1 **A**
9. června 2009 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr (max. 15b.)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
0							

Potřebné minimum (**včetně bodů ze semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

---

1. (6 bodů) V závislosti na reálném parametru a řešte soustavu lineárních rovnic nad R

$$\begin{aligned} (a+1)x_1 + x_2 + x_3 &= a^2 + 3a \\ x_1 + (a+1)x_2 + x_3 &= a^3 + 3a^2 \\ x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a^4 + 3a^3 \end{aligned}$$

2. (5 bodů) Rozhodněte, zda jsou polynomy

$$1 + x, \quad 1 - x, \quad 2 + x - x^2$$

lineárně nezávislé ve vektorovém prostoru polynomů s reálnými koeficienty $\mathbb{R}[x]$. Své tvrzení zdůvodněte.

3. (5 bodů) V $\mathbb{R}^4$ určete úhel přímky $p : [1, 2, 3, 4] + t(-3, 15, 1, -5)$ a roviny $\rho : [0, 0, 0, 0] + r \cdot (1, -5, -2, 10) + s \cdot (1, 8, -2, -16)$.

4. (3 body) Uveďte příklad (příp. stručně zdůvodněte neexistenci) relace na množině $\{a, b, c\}$, která:

(a) je ekvivalencí i uspořádáním;

(b) je reflexivní a tranzitivní, ale není úplným uspořádáním;

(c) je zobrazením i ekvivalencí.

5. (5 bodů) Uvažte proces testování skupiny obyvatelstva na přítomnost nemoci, kterou trpí 0,1% populace, s využitím testu s následujícími parametry:

- je-li testovaná osoba nemocná, test to rozpozná s pravděpodobností 0,99;
- je-li testovaná osoba zdravá, test to rozpozná s pravděpodobností 0,95.

Určete pravděpodobnost *false positive* výsledku, tj. výsledku, kdy test ukazuje na onemocnění, přestože byl proveden na zdravém pacientovi a *false negative* výsledku (výsledek testu je negativní, přestože je pacient nemocný).

6. (6 bodů) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete algebraickou a geometrickou násobnost všech vlastních hodnot a uveďte, je-li matice M podobná nějaké diagonální matici. Pokud ano, uveďte takovou matici a matici podobnosti.

Matematika 1 $\boxed{\textbf{B}}$
9. června 2009 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr (max. 15b.)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
0							

Potřebné minimum (**včetně bodů ze semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

---

1. (5 bodů) Pomocí Cramerova pravidla řešte v $\mathbb{R}$ soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 4 \\ x + 2y + 2z &= 6 \\ 5x + y + 4z &= 21 \end{aligned}$$

2. (6 bodů) Nalezněte obě matice přechodu mezi bázemi

$$\underline{e} = (1, x, x^2, x^3), \underline{f} = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$$

v prostoru polynomů s reálnými koeficienty stupně nejvýše 3. Určete souřadnice vektoru $5x^3 + 3x^2 - x + 3$ v bázi $\underline{f}$.

3. (3 body) Uveďte příklad (příp. stručně zdůvodněte neexistenci) relace na množině $\{a, b, c\}$, která:

(a) je ekvivalencí, k níž příslušný rozklad má dva prvky;

(b) není reflexivní, je symetrická a tranzitivní;

(c) je zobrazením i uspořádáním.

4. (5 bodů) Určete ortogonální doplněk podprostoru $\langle(1, -1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, -1, 1)\rangle$ v R^5.

5. (5 bodů) Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je určeno pomocí násobení maticí A předpisem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A$. Určete matici A, víte-li, že

$$\varphi((2, 1, 1)) = (-1, 0, 0), \quad \varphi((1, 1, 1)) = (0, 4, 0), \quad \varphi((1, 0, 2)) = (0, 0, 2).$$

6. (6 bodů) Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolené šesticiferné číslo $a, (10^5 \leq a < 10^6)$ bude mít ve svém ciferném zápisu:

(a) číslici 2 právě jednou;

(b) každou z číslic 2 a 5 právě dvakrát;

(c) alespoň jednu sudou číslici.