

Hodnocení:

Semestr (max. 15b.)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ
0							

Potřebné minimum (**včetně bodů ze semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

1. (5 bodů) Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je určeno pomocí násobení maticí A předpisem $\varphi((x_1, x_2, x_3)^T) = A \cdot (x_1, x_2, x_3)^T$. Určete matici A , víte-li, že

$$\varphi((2, -1, 1)^T) = (-4, 1, 0)^T, \quad \varphi((0, 2, -2)^T) = (0, 2, 0)^T, \quad \varphi((1, 1, 0)^T) = (1, 0, 2)^T.$$

2. (6 bodů) Mějme vektory $u_1 = (1, t, 2, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, -2, 2, 3)$, $u_4 = (2, -5, 6, 3)$.

- (a) Určete, pro které hodnoty parametru $t \in \mathbb{R}$ je u_1 lineární kombinací u_2, u_3, u_4 ,
- (b) pomocí Gram-Schmidtova procesu určete ortogonální bázi $\langle u_2, u_3, u_4 \rangle$,
- (c) určete souřadnice u_1 (pro hodnotu t určenou v (a)) v bázi určené v (b).

3. (4 body) V klobouku je 6 bílých a 8 černých kuliček. Náhodně postupně vytáhneme 3 kuličky. Určete pravděpodobnost, že jedna je bílá a 2 černé, pokud:

- (a) každou kuličku po vytažení vrátíme do klobouku;
- (b) vytažené kuličky již do klobouku nevracíme.

4. (6 bodů) V populačním modelu dravec-kořist je vztah mezi počtem lišek (L_k) a králíků (K_k) v daném a následujícím měsíci dán rovnostmi

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= 0,4L_k + 0,3K_k \\ K_{k+1} &= -0,325L_k + 1,2K_k, \end{aligned}$$

přítom na počátku je ve zkoumané oblasti 65 lišek a 80 králíků. Pomocí výpočtu vlastních hodnot a vektorů matice systému analyzujte limitní chování tohoto modelu. Popište kolik králíků bude z dlouhodobého hlediska připadat na jednu lišku?

5. (5 bodů) Vypočtěte hodnotu determinantu matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. (4 body) Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány podprostory

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid x = 2y + 3z\}, \quad W_2 = \{(r, -2r, -3r) \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

Rozhodněte (a zdůvodněte), zda součet $W_1 + W_2$ je přímým součtem.

Hodnocení:

Semestr (max. 15b.)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Σ
0							

Potřebné minimum (včetně bodů ze semestru) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

1. (5 bodů) Vzhledem k neznámé A řešte maticovou rovnici

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (6 bodů) Mějme vektory $u_1 = (1, -1, 1, 2)$, $u_2 = (-2, 1, -2, -5)$, $u_3 = (2, 0, 2, 6)$, $u_4 = (0, 0, 3, t)$.

- (a) Určete, pro které hodnoty parametru $t \in \mathbb{R}$ je u_4 lineární kombinací u_1, u_2, u_3 ,
- (b) pomocí Gram-Schmidtova procesu určete ortogonální bázi $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$,
- (c) určete souřadnice u_4 (pro hodnotu t určenou v (a)) v bázi určené v (b).

3. (4 body) Určete pravděpodobnost, že při náhodném rozdání 7 karet z běžného mariášového balíčku (32 karet 4 barev po osmi hodnotách):

- (a) jsou mezi nimi aspoň dvě esa;
- (b) je mezi rozdanými kartami alespoň 6 karet téže barvy.

4. (6 bodů) V populačním modelu dravec-kořist je vztah mezi počtem lišek (L_k) a králíků (K_k) v daném a následujícím měsíci dán rovnostmi

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= 0,5L_k + 0,5K_k \\ K_{k+1} &= -0,2L_k + 1,2K_k, \end{aligned}$$

přítom na počátku je ve zkoumané oblasti 65 lišek a 80 králíků. Pomocí výpočtu vlastních hodnot a vektorů matice systému analyzujte limitní chování tohoto modelu. Určete podmínku na úvodní počet králíků a lišek, při jejímž splnění limitní počet králíků převýší jejich úvodní počet.

5. (5 bodů) V rovině jsou dány body $A = [0, 0]$, $B = [2, 1]$, $C = [3, 3]$, $D = [1, 4]$, $X = [2, 0]$. Pomocí výpočtu příslušných determinantů (jiné řešení nebude uznáno!) určete

- (a) hrany čtyřúhelníku $ABCD$, které jsou vidět z bodu X .
- (b) obsah čtyřúhelníku $ABCD$.

6. (4 body) Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány podprostory

$$W_1 = \{(x, y, z) \mid x - 2y - 3z = 0\}, \quad W_2 = \{(x, y, z) \mid x = z\}.$$

Rozhodněte (a zdůvodněte), zda součet $W_1 + W_2$ je přímým součtem.