e) $8y + 10x + 5yy' + 7xy' = 0$ f) $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$

g) $x^3y' = y(y^2 + x^2)$ h) $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0$

i) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$ j) $y' = (x + y)^2$

Výsledky:
1.a) $x^2 + y^2 = C$, b) $y = Cx$, c) $\ln|xy| + x - y = C$, $y = 0$, d) $y = 1$, e) $2e^{y^2} = e^x + 1$, f) $1 + y^2 = C(1 - x^2)$, g) $x^2 + y^2 = 2\ln|x| + C$, h) $\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + C$. **2.**a) $y^2 = x^2(C + \ln x^2)$, b) $y^2 - x^2 = Cy^3$, $y = 0$, c) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C + \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, d) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, e) $y = -x$, f) $x^2 = C^2 + 2Cy$. **3.**a) $-5x + 10y + 7\ln|10x + 5y + 9| = C$, b) $-6x + 4y - 7 = Ce^{-2x}$, c) $x + \operatorname{cotg}\frac{x-y}{2} = C$, $y = x$, d) $(x + 2y + 2)^2 = 9e^{2y}$. **4.**a) $(x+y-1)^3 = C(x-y+3)$, b) $e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y+2)$, c) $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$, d) $(y-2x-9)^2(y-x-3) = C$. **5.**a) $Ce^{-2x} + 2x - 1$, b) $e - x^2(C + \frac{x^2}{2})$, c) $Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$, d) $e^x(\ln|x| + \frac{x^2}{2}) + Ce^x$, e) $(x + C)(1 + x^2)$, f) $\frac{e^x - 1}{x}$, g) $\frac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$, h) $\frac{x}{\cos x}$. **6.**a) $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$, b) $y(1 + \ln x + Cx) = 1$, c) $x^2 - y^2 = Cx$, d) $y^3 = \frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}$. **7.**a) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$, b) $x + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$, c) $xe^y - y^2 = C$, d) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + x - \frac{1}{2}y^2 = C$. **8.**a) $x - \frac{y}{x} = C$, b) $x^2 + \frac{2x}{y} = C$, c) $\frac{y^2}{2} + \frac{\ln x}{y} = C$, d) $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = C$. **9.**a) Výraz $\frac{Q_x - P_y}{P - Q}$ musí být funkcí $x + y$, b) Výraz $\frac{Q_x - P_y}{xP - yQ}$ musí být funkcí xy. **10.**a) $y = Cx^2 + \frac{1}{x}$, b) $\sin\frac{y}{x} = Cx$, c) $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$, d) $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1$, e) $(x + y)^2(2x + y)^3 = C$, f) $y = \frac{1}{(1+x)(C + \ln|1+x|)}$, g) $x = Ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$, h) $x^y = C$, i) $(x^2 + y^2)e^x = C$, j) $y = -x + \operatorname{tg}(x + C)$.

1.4 Ukázky aplikací rovnic prvního řádu

Jak jsme se již zmínili v úvodu, diferenciální rovnice mají řadu aplikací. V současnosti to již není jen ve fyzice a technických disciplínách, ale i v biologii, ekologii a chemii a pronikají též do ekonomie a dalších společenských věd. Ukážeme si formou příkladů některé aplikace. Řadu dalších lze nalézt v početné literatuře, z níž uvádíme jako malou ukázku např. [5, 11, 15, 23, 28].

Příklad 1.12 (Rozpad radioaktivního materiálu) Je známo, že rychlost rozpadu rádia je přímo úměrná okamžitému množství rádia. Poloměr rozpadu izotopu rádia $^{222}_{88}\mathrm{Ra}$ je 1590 let, tj. počáteční množství se za tuto dobu zmenší na polovinu. Určete, za jak dlouho se počáteční množství sníží o 25%.

Řešení: Nechť $y(t)$ je množství rádia v čase t. Pak pro rychlost rozpadu platí

$$y' = ky,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Nechť v čase $t = 0$ je množství rádia rovno y_0. Pak

$$y(0) = y_0, \quad y(1590) = \frac{1}{2} y_0$$

a máme určit t_1 tak, aby

$$y(t_1) = \frac{3}{4} y_0.$$

Diferenciální rovnice pro $y(t)$ je homogenní lineární rovnice, tj. rovnice se separovanými proměnnými. Tedy

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = k\,dt \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = kt + \ln c$$

a po odlogaritmování

$$y = ce^{kt}.$$

Z počáteční podmínky v $t = 0$ určíme

$$y_0 = y(0) = ce^{k \cdot 0} = c$$

a hledané partikulární řešení je

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu $t = 1590$, dostaneme

$$\frac{1}{2} y_0 = y(1590) = y_0 e^{1590k} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{1590k}.$$

Logaritmováním dostaneme

$$-\ln 2 = 1590k \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{\ln 2}{1590}.$$

Konečně pro t_1 máme

$$\frac{3}{4} y_0 = y(t_1) = y_0 e^{kt_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{4} = e^{kt_1}.$$

Odtud vypočteme

$$\ln \frac{3}{4} = kt_1 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{\ln \frac{3}{4}}{k} \doteq 660.$$

Ke snížení o 25% tedy dojde asi za 660 let.

Příklad 1.13 (Rychlost chemické reakce) Uvažujme dvě chemikálie A a B, které navzájem reagují. Předpokládejme, že při vytváření nového produktu se kombinuje jedna molekula z A s jednou molekulou z B. Určete rychlost chemické reakce, víte-li, že je přímo úměrná součinu okamžitých koncentrací reagujících látek.

Řešení: Nechť $x(t)$ resp. $y(t)$ je koncentrace (v molekulách na litr) v čase t látky A resp. látky B. Nechť $a = x(0) > 0$, $b = y(0) > 0$ jsou počáteční koncentrace. Protože se spolu kombinuje po jedné molekule, klesají obě koncentrace touž rychlostí, tj.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}.$$

Úbytek $z(t)$ koncentrace látky A resp. B v čase t je pak dán vztahem

$$z(t) = a - x(t) \text{ resp. } z(t) = b - y(t). \tag{1.21}$$

Odtud máme

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}.$$

Výraz $\frac{dz}{dt}$ nazýváme *rychlost reakce*. Zadání nám říká, že platí

$$\frac{dz}{dt} = kxy,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti (kterou lze experimentálně určit). Dosadíme-li za x a y z (1.21), dostaneme pro $z(t)$ diferenciální rovnici

$$z' = k(a - z)(b - z), \quad z(0) = 0.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, tedy

$$\frac{dz}{dt} = k(z - a)(z - b) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{(z - a)(z - b)} = k\,dt$$

a po integraci

$$\int \frac{dz}{(z - a)(z - b)} = k \int dt.$$

Integrál na levé straně je z racionální lomené funkce. Po jednoduchém rozkladu na parciální zlomky vyjde pro $a \neq b$

$$\int \frac{dz}{(z - a)(z - b)} = \int \left(\frac{\frac{1}{a-b}}{z - a} - \frac{\frac{1}{a-b}}{z - b} \right) dz = \frac{1}{a - b}(\ln|z - a| - \ln|z - b|).$$

Tedy

$$\frac{1}{a - b} \ln \left| \frac{z - a}{z - b} \right| = kt + \ln c.$$

Po odlogaritmování vyjde
$$\frac{z-a}{z-b} = c^{a-b}e^{k(a-b)t}.$$
Z počáteční podmínky $z(0) = 0$ dostaneme
$$\frac{0-a}{0-b} = c^{a-b}e^0 \implies \frac{a}{b} = c^{a-b} \implies c = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{a-b}}.$$
Po dosazení a osamostatnění z postupně máme
$$\frac{z-a}{z-b} = \frac{a}{b}e^{k(a-b)t} \implies bz - ab = aze^{k(a-b)t} - abe^{k(a-b)t},$$
tj.
$$z(t) = ab\,\frac{e^{k(a-b)t}-1}{ae^{k(a-b)t}-b}.$$
Rychlost reakce je tudíž
$$\frac{dz}{dt} = ab\frac{k(a-b)e^{k(a-b)t}(ae^{k(a-b)t}-b) - (e^{k(a-b)t}-1)ak(a-b)e^{k(a-b)t}}{(ae^{k(a-b)t}-b)^2} =$$
$$= ab\frac{k(a-b)e^{k(a-b)t}(ae^{k(a-b)t}-b-ae^{k(a-b)t}+a)}{(ae^{k(a-b)t}-b)^2} =$$
$$= kab(a-b)^2\frac{e^{k(a-b)t}}{(ae^{k(a-b)t}-b)^2}.$$

Pro $a = b$ je
$$\int \frac{dz}{(z-a)^2} = \int (z-a)^{-2}\,dz = -\frac{1}{z-a},$$
takže
$$-\frac{1}{z-a} = kt + c.$$
Z počáteční podmínky dostaneme
$$-\frac{1}{0-a} = 0 + c \implies c = \frac{1}{a}$$
a tedy
$$-\frac{1}{z-a} = kt + \frac{1}{a} \implies z - a = -\frac{a}{akt+1},$$
takže
$$z(t) = a - \frac{a}{akt+1} = \frac{a^2kt}{akt+1}.$$
Pak rychlost reakce je
$$\frac{dz}{dt} = a^2k\frac{1(akt+1) - tak}{(akt+1)^2} = \frac{a^2k}{(akt+1)^2}.$$

Příklad 1.14 (Smíchávání) Velká nádrž obsahuje 100 hl slané vody, v níž je rozpuštěno 50 kg soli. Do nádrže vtéká rychlostí 6 hl/min slaná voda obsahující 2 kg soli na jeden hl. Směs, která je promícháváním neustále udržována homogenní, vytéká z nádrže rychlostí 4 hl/min. Určete výsledné množství soli v nádrži po uplynutí t min.

Řešení: Označme $y(t)$ množství soli v kg, které je v nádrži v čase t, $t \geq 0$. Nádrž obsahuje v čase t zřejmě $100 + (6 - 4)t$ hl vody. Koncentrace v tomto okamžiku bude

$$\frac{y(t)}{100 + 2t} \text{ kg/hl.}$$

Nechť $t_0 \geq 0$ je pevné a $t > t_0$. Pak během časového intervalu $\langle t_0, t)$ přibude v nádrži

$$6 \cdot 2 \cdot (t - t_0) = \int_{t_0}^{t} 6 \cdot 2 \, ds$$

kg soli a ubude

$$\int_{t_0}^{t} 4 \cdot \frac{y(s)}{100 + 2s} \, ds$$

kg soli. Tedy musí platit

$$y(t) = y(t_0) + 12(t - t_0) - 4 \int_{t_0}^{t} \frac{y(s)}{100 + 2s} \, ds.$$

Když tuto rovnost zderivujeme podle t (s použitím věty o derivování integrálu jako funkce horní meze), dostaneme

$$y'(t) = 12 - \frac{4y(t)}{100 + 2t}, \tag{1.22}$$

což je hledaná diferenciální rovnice. Tuto rovnici nyní vyřešíme. Jde o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu.

I. Homogenní rovnice je

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4y}{100 + 2t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{4\,dt}{100 + 2t}$$

a po integraci

$$\int \frac{dy}{y} = -4 \int \frac{dt}{100 + 2t}.$$

Protože

$$\int \frac{dt}{100 + 2t} = \left| \begin{array}{lcl} 2t + 100 & = & u \\ 2\,dt & = & du \\ dt & = & \frac{1}{2}\,du \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| = \frac{1}{2} \ln |100 + 2t|,$$

vyjde po integraci

$$\ln|y| = -2\ln|100+2t| + \ln c,$$

tj.

$$y = \frac{c}{(100+2t)^2}.$$

II. Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme ve tvaru

$$y(t) = \frac{K(t)}{(100+2t)^2}.$$

Je

$$y'(t) = \frac{K'(t)(100+2t)^2 - K(t)\cdot 2(100+2t)2}{(100+2t)^4}.$$

Po dosazení do rovnice (1.22) vyjde

$$\frac{K'(t)(100+2t)^2 - 4(100+2t)K(t)}{(100+2t)^4} = 12 - \frac{4K(t)}{(100+2t)^3} \implies \frac{K'(t)}{(100+2t)^2} = 12.$$

Tedy

$$K(t) = 12\int(100+2t)^2\,dt = \left|\begin{array}{lcl} 100+2t & = & u \\ 2\,dt & = & du \\ dt & = & \frac{1}{2}\,du \end{array}\right| = 6\int u^2\,du = 2u^3 =$$

$$= 2(100+2t)^3.$$

Partikulární řešení tudíž je

$$y = \frac{2(100+2t)^3}{(100+2t)^2} = 2(100+2t),$$

takže obecné řešení rovnice (1.22) je

$$y(t) = \frac{c}{(100+2t)^2} + 2(100+2t).$$

Protože $y(0) = 50$, dostaneme pro c rovnici

$$50 = \frac{c}{100^2} + 200 \implies c = -150\cdot 100^2 = -15\cdot 10^5.$$

Množství soli je tedy dáno funkcí

$$y(t) = 2(100+2t) - \frac{15\cdot 10^5}{(100+2t)^2}.$$

Příklad 1.15 (Složitý úrok) Nechť částka A_0 je investována při úrokové míře $k\%$ za rok, přičemž úrok je připisován spojitě. Ukažte, že hodnota investic $A(t)$ po t letech je řešením lineární homogenní rovnice

$$\frac{dA}{dt} = \frac{k}{100}A, \quad A(0) = A_0. \tag{1.23}$$

Řešení: Předpokládejme, že úrok je získáván s mírou $k\%$ za rok a je připisován n krát za rok. Pak množství $A_n(t)$, které je součtem úroku a jistiny, je na konci t let dáno vztahem

$$A_n(t) = A_0\left(1 + \frac{k}{n}\frac{1}{100}\right)^{nt} = A_0\left[\left(1 + \frac{k}{n}\frac{1}{100}\right)^{n}\right]^{t}.$$

Nyní je přirozené definovat

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_n(t).$$

Protože je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n} = e^{\alpha}, \quad \alpha \in R,$$

vyjde

$$A(t) = A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{k}{n}\frac{1}{100}\right)^{n}\right]^{t} = A_0\left(e^{\frac{k}{100}}\right)^{t} = A_0 e^{\frac{k}{100}t}.$$

To je ale právě řešení počáteční úlohy (1.23), jak se lze snadno přesvědčit dosazením.

Příklad 1.16 (Elektrický obvod) Ideální napěťový zdroj o konstantním napětí U napájí sériovou kombinaci rezistoru o odporu R ohmů a induktoru o indukčnosti L henry — viz obr. 1.11. Sestavte a vyřešte diferenciální rovnici pro proud $i(t)$ odebíraný ze zdroje.

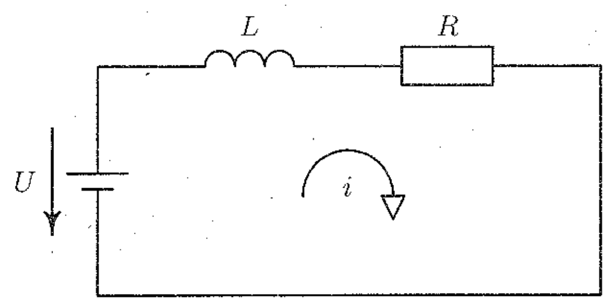
Řešení: Podle druhého Kirchhoffova zákona je algebraický součet všech napětí v uzavřeném obvodu roven nule. Označme $i(t)$, $t \geq 0$, proud v ampérech, který obvodem prochází. Pak $L\,\frac{di}{dt}$ je napětí na induktoru a Ri je napětí na rezistoru. Tedy

$$L\,\frac{di}{dt} + Ri - U = 0,$$

tj.

$$i'(t) + \frac{R}{L}\,i(t) = \frac{U}{L}, \quad i(0) = i_0, \tag{1.24}$$

kde i_0 je velikost proudu na počátku. Jde o nehomogenní lineární rovnici prvního řádu.



Obr. 1.11: Elektrický obvod

I. Pro homogenní rovnici máme

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i \quad \Longrightarrow \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\, dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int dt,$$

tj.

$$\ln |i| = -\frac{R}{L}\, t + \ln c \quad \Longrightarrow \quad i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

II. Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme ve tvaru

$$i(t) = K(t) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Po dosazení dostaneme

$$K'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - K(t)e^{-\frac{R}{L}t}\frac{R}{L} + \frac{R}{L}K(t)e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{L},$$

tj.

$$K'(t) = \frac{U}{L} e^{\frac{R}{L}t}.$$

Odtud

$$K(t) = \frac{U}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\, dt = \left| \begin{array}{ccc} \frac{R}{L}t & = & s \\ \frac{R}{L}dt & = & ds \\ dt & = & \frac{L}{R}\, ds \end{array} \right| = \frac{U}{R}\int e^{s}\, ds = \frac{U}{R} e^{s} = \frac{U}{R} e^{\frac{R}{L}t},$$

takže partikulární řešení je

$$i(t) = \frac{U}{R} e^{\frac{R}{L}t} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}.$$

Obecné řešení rovnice (1.24) pak je

$$i(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}.$$

Z počáteční podmínky dostáváme

$$i_0 = c + \frac{U}{R} \quad \Longrightarrow \quad c = i_0 - \frac{U}{R}.$$

Průběh proudu je tudíž popsán funkcí

$$i(t) = \left(i_0 - \frac{U}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R}.$$

Příklad 1.17 (Siločáry) Nechť $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ je nenulové rovinné silové pole, které je definované na otevřené množině Ω. Odvoďte diferenciální rovnici pro siločáry, víte-li, že tečna k siločáře je v každém bodě souhlasně kolineární s vektorem síly v tomto bodě.

Řešení: Nechť C je siločára, která má parametrické rovnice $(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in J$, kde J je interval. Pak její tečný vektor v bodě $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $t_0 \in J$, je $\vec{t}(x_0, y_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$. Víme, že má platit $\vec{t}(x_0, y_0) = \lambda \vec{F}(x_0, y_0)$, kde $\lambda \geq 0$. Tedy

$$(\varphi'(t_0), \psi'(t_0)) = \lambda(P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)).$$

Protože $\vec{F} \neq \vec{0}$, nejsou P a Q současně nulové. Nechť např. $P(x_0, y_0) \neq 0$. Pak i $\varphi'(t_0) \neq 0$ a C je v okolí bodu x_0 grafem funkce proměnné x, tj. $y(x)$. Podle věty o derivaci funkce dané parametricky — viz např. [13, str. 100] — je

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{\lambda Q(x_0, y_0)}{\lambda P(x_0, y_0)} = \frac{Q(x_0, y_0)}{P(x_0, y_0)}.$$

Odtud dostáváme, že $y(x)$ vyhovuje rovnici

$$Q(x,y)\,dx - P(x,y)\,dy = 0.$$

Analogicky se zváží případ $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Předchozí rovnice se obvykle zapisuje ve tvaru

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}.$$

Cvičení

1. Uvažujme homogenní chemickou reakci, v níž působí jedna látka. Nechť na počátku reakce, tj. pro $t = 0$, je koncentrace rovna $a > 0$. Je-li $a - x(t)$ koncentrace v čase t, je podle Wilhelmyho zákonu rychlost reakce rovna

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Určete $x(t)$.

$[x(t) = a(1 - e^{-kt})]$

2. Uvažujme dvě chemikálie A a B, které navzájem reagují. Předpokládejme, že při vytváření nového produktu se váže jedna molekula z A se dvěma molekulami z B. Určete rychlost chemické reakce, víte-li, že je přímo úměrná součinu okamžité koncentrace látky A a druhé mocniny okamžité koncentrace látky B — viz příklad 1.13.

Nápověda: Je $\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt}$.

$$\Big[z' = k(a-z)(b-2z)^2, \quad z(0) = 0;$$

$$\frac{1}{(2a-b)^2}\ln\left|\frac{b-2z}{a-z}\right| + \frac{1}{(2a-b)(b-2z)} + \frac{\ln\frac{a}{b}}{(2a-b)^2} + \frac{1}{b^2-2ab} = kt \quad \text{pro } 2a \neq b,$$

$$\frac{1}{8(a-z)^2} - \frac{1}{8a^2} = kt \quad \text{pro } 2a = b\Big]$$

3. Najděte řešení počáteční úlohy $Li' + Ri = U$, $i(0) = i_0$, kde $L > 0$, $R \geq 0$, U a i_0 jsou dané konstanty. Je to rovnice pro proud $i = i(t)$ v ampérech v obvodu obsahujícím induktor o indukčnosti L (v henry), rezistor o odporu R (v ohmech) a ideální zdroj o napětí U (ve voltech). Nechť L, U a i_0 jsou konstanty a R je parametr, kterým se proud reguluje; tedy $i = i(t, R)$. Dokažte, že

$$\lim_{R\to 0^+} i(t,R) = i(t,0) = \frac{Ut}{L} + i_0$$

pro každé t.

4. Předpokládejme, že radioaktivní izotop stroncia ^{90}Sr se rozpadá exponenciálně podle rovnice $y' = -ay$, $a > 0$. Určete konstantu a a čas, za který se sníží množství stroncia ze 100% na 10%, víte-li, že poločas rozpadu je 28,1 roku.

$\left[a = \frac{\ln 2}{28{,}1} = 0{,}025;\ t \doteq 93{,}3 \text{ roku}\right]$

5. Velká nádrž obsahuje 100 hl vody, v níž je rozpuštěno 50 kg soli. Do ní přitéká rychlostí 3 hl/min roztok obsahující 2 kg soli v jednom hl. Směs je mícháním udržována homogenní a vytéká stejnou rychlostí z nádrže. Jak mnoho soli je v nádrži po 30 min.?

[117,5 kg]

6. Nádrž obsahuje 50 hl vody, v níž je rozpuštěno 20 kg soli. Do nádrže je přidávána čistá sůl rychlostí 1 kg/min. Směs je udržována homogenní a vytéká z nádrže rychlostí 2 hl/min. Jak mnoho soli je v nádrži po 10 min.? Jaká je v té

době koncentrace?

[19, 7 kg; 0, 66 kg/hl]

7. Velká nádrž A obsahuje na počátku 60 hl vody a 40 hl alkoholu. Do nádrže přitéká voda rychlostí 3 hl/min a alkohol rychlostí 1 hl/min. Směs, která je důkladně promíchávaná, teče do druhé nádrže B rychlostí 3 hl/min. Nádrž B obsahovala na počátku 100 hl vody. Směs je v nádrži B mícháním udržovaná homogenní a vytéká z ní rychlostí 2 hl/min. Jak mnoho alkoholu je v každé nádrži po 50 min.? Která nádrž nakonec (tj. pro velká t) obsahuje více alkoholu?

[A: 41, 9 hl; B: 33, 1 hl; B]