Seznam přednášek z matematické analýzy 1

1. Zobrazení, funkce (definiční obor, graf, inverzní a složená funkce, vlastnosti funkcí - sudost, lichost, monotonie ...)
2. Podmnožiny množiny $\mathbb{R}$, jejich suprema, infima, maxima, minima, pojem okolí
3. Polynomy, racionální funkce
4. Pojem limity funkce - vlastní limita
5. Spojitost funkce
6. Derivace funkce a její význam - tečna
7. Obecné věty o spojitosti a derivaci
8. Spojitost a derivace inverzních a složených funkcí
9. Elementární funkce
10. Nevlastní limity, limity v nevlastních bodech
11. L'Hospitalovo pravidlo, neurčité výrazy
12. Vyšetřování průběhu funkce, extrémy, význam derivací, asymptoty
13. (Posloupnosti)

Opakování - rovnice, nerovnice, matematická indukce

Příklad 0.1. *Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ jsou splněny nerovnosti:*

1. $3x - 2 < x + 10 \qquad [(-\infty, 6)]$
2. $x^2 - 7x + 12 \geq 0 \qquad [(-\infty, 3\rangle \cup \langle 4, \infty)]$
3. $2x^2 + x - 1 < 0 \qquad [(-1, \frac{1}{2})]$
4. $4x^2 + 4x + 1 > 0 \qquad [(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)]$
5. $x^2 + 3x + 3 \leq 0 \qquad [\emptyset]$
6. $\frac{1}{x} - \frac{3}{x+3} < \frac{4}{1-2x} \qquad [(-3, 0) \cup (\frac{3}{20}, \frac{1}{2})]$
7. $x + 2 > 0 \wedge 3x - 2 \leq 0 \qquad [(-2, \frac{2}{3}\rangle]$
8. $x + 2 \leq 0 \wedge 3x - 2 \geq 0 \qquad [\emptyset]$
9. $|x - 3| > 5 \qquad [(-\infty, -2) \cup (8, \infty)]$
10. $|x + 2| < 8 \qquad [(-10, 6)]$
11. $|x - a| < \epsilon \qquad [(a - \epsilon, a + \epsilon)]$
12. $|x - a| \leq \epsilon \qquad [\langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle]$
13. $|x - a| > \epsilon \qquad [(-\infty, a - \epsilon) \cup (a + \epsilon, \infty)]$
14. $0 < |x - a| < \epsilon \qquad [(a - \epsilon, a) \cup (a, a + \epsilon)]$
15. $x + 1 < |x| \qquad [(-\infty, -\frac{1}{2})]$
16. $2x - |3x + 6| \leq \frac{8+2x}{3} \qquad [(-\infty, \infty)]$
17. $\frac{2x-3}{6} - \frac{x+5}{3} \geq \frac{|4-x|}{2} \qquad [\emptyset]$
18. $\frac{x-1}{3} - 2|1 - 4x| > \frac{1}{4}x - \frac{7-52x}{6} \qquad [(-\infty, -2)]$
19. $|x - 3| + 3|x - 1| < 2x + 1 \qquad [(\frac{5}{6}, \frac{7}{2})]$
20. $|x^2 - 4| < 3 \qquad [(-\sqrt{7}, -1) \cup (1, \sqrt{7})]$

21. $x^2 + x - 2 > 0$ $[(-\infty, -2) \cup (1, \infty)]$

22. $x^2 + 2x + 4 > 0$ $[(-\infty, \infty)]$

23. $x^2 - x + 1 \leq 0$ $[\emptyset]$

24. $x^2 - 2x + 1 > 0$ $[(-\infty, 1) \cup (1, \infty) = (-\infty, \infty) \setminus \{1\}]$

Příklad 0.2. *Matematickou indukcí dokažte:*

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

1 Zobrazení, funkce

Příklad 1.1. *Nakreslete graf funkce:*

a) $y = 2\sin(2x+1)$

b) $y = |\sin x|$

c) $y = \sin |x|$

d) $y = \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$

Příklad 1.2. *Určete definiční obor funkce:*

1.
$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}} \qquad [(-\infty,1)\cup(2,\infty)]$$

2.
$$y = \sqrt{\ln\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)} \qquad [\langle 1,4\rangle]$$

3.
$$y = \log_x 2 \qquad [(0,1)\cup(1,\infty)]$$

4.
$$y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}} \qquad [\emptyset]$$

5.
$$y = \ln\sin x \qquad [\{x : x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}\}]$$

6.
$$y = \frac{1}{\ln(1-x)} + \sqrt{x+2} \qquad [\langle -2,0)\cup(0,1)]$$

7.
$$y = \frac{3}{4-x^2} + \ln(x^3-x) \qquad [(-1,0)\cup(1,2)\cup(2,\infty)]$$

8.
$$y = \ln\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5} \qquad [(4,5)\cup(6,\infty)]$$

9.
$$y = \ln\sin(x-3) + \sqrt{16-x^2} \qquad [(3-2\pi, 3-\pi) \cup (3,4\rangle]$$

Příklad 1.3. *Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $k \leq x < k+1$. Definujeme funkci celá část čísla x, $[x] := k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je číslo mající předchozí vlastnost. Např. $[1,752] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-5,28] = -6$, $[-\pi^2] = -10$. Nakreslete graf funkce $y = [x]$.*

Příklad 1.4. *Definujeme funkci $\Pi(x)$ takto: $\Pi(x) :=$ počet prvočísel, která nejsou větší než x. Nakreslete graf funkce $y = \Pi(x)$ pro $x \in \langle 0, 20\rangle$.*

Příklad 1.5. *Nakreslete graf funkce $y = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$.*

Příklad 1.6. *Uveďte příklad funkce sudé, liché, periodické s periodou $p \neq 0$, ohraničené, monotonní a ryze monotonní.*

Příklad 1.7. *Nakreslete graf funkce:*

$$y = \begin{cases} \cos x & \text{pro } -\pi \leq x \leq 0; \\ 1 & \text{pro } 0 < x < 1; \\ \frac{1}{x} & \text{pro } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Určete obor hodnot dané funkce. $[H = \langle -1, 1\rangle]$

Příklad 1.8. *Určete definiční obor funkce:*

1.
$$y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

2.
$$y = \ln\frac{\alpha - x}{x+\alpha}, \quad \alpha > 0$$

3.
$$y = \ln\left[x^2(-x^2+3x+4)\right] + \frac{1}{\log_2|x|}$$

4.
$$y = \sqrt{\mathrm{e}^{2x-1} - \alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

5.
$$y = \sqrt{(x-1)\left(\mathrm{e}^{2x} - 4\,\mathrm{e}^x + 3\right)}$$

Řešení. 1. $D = \langle 1, \infty)$

2. $D = (-\alpha, \alpha)$

3. $D = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 4)$

4. $D = (-\infty, \infty)$ v případě $\alpha \leq 0$
   $D = \langle \frac{1}{2}(1 + \ln \alpha), \infty)$ v případě $\alpha > 0$

5. Zřejmě $1 \in D$.
   I. $x > 1$: $\mathrm{e}^{2x} - 4\,\mathrm{e}^{x} + 3 \geq 0$; $y^2 - 4y + 3 \geq 0 \Rightarrow (y-3)(y-1) \geq 0$. Tedy $\mathrm{e}^{x} \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 3, \infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle \ln 3, \infty)$. Odtud $(1, \infty) \cap [(-\infty, 0\rangle \cup \langle \ln 3, \infty)] = \langle \ln 3, \infty)$.
   II. $x < 1$: $\mathrm{e}^{2x} - 4\,\mathrm{e}^{x} + 3 \leq 0$; $\mathrm{e}^{x} \in \langle 1, 3\rangle \Leftrightarrow x \in \langle 0, \ln 3\rangle$ a $(-\infty, 1) \cap \langle 0, \ln 3\rangle = \langle 0, 1)$.
   $D = \{1\} \cup \langle \ln 3, \infty) \cup \langle 0, 1) = \langle 0, 1\rangle \cup \langle \ln 3, \infty)$.

Příklad 1.9. *Určete definiční obor a obor hodnot funkce:*

a)

$$y = \sqrt{x-2} + 2$$

b)

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

c)

$$y = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

Řešení. a) $D = \langle 2, \infty)$, $H = \langle 2, \infty)$

b) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, $H = (-\infty, 0\rangle \cup (1, \infty)$

c) $D = (-\infty, -1) \cup \langle 0, \infty)$, $H = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$

Příklad 1.10. *Nakreslete grafy funkcí $y = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{Z}$.*

Příklad 1.11. *Nakreslete grafy funkcí $y = 8x - 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.*

Příklad 1.12. *Rozhodněte, zda některá z následujících funkcí je sudá nebo lichá:*

$$\sin x^2; \operatorname{cotg} x; 2^{|x|}; \frac{\cos x}{x}; [x^3]; \sqrt{x}; x^4 - 1; -\sqrt[3]{x}; \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$$

Příklad 1.13. *Nalezněte nejmenší periodu funkcí* $\sin \frac{1}{3}x$, $\operatorname{cotg} ax$ *($a > 0$),* $\cos^2 2x$.

Řešení. 6π, $\frac{\pi}{a}$, $\frac{\pi}{2}$

Příklad 1.14. *Určete intervaly, na nichž jsou monotonní funkce* $|\sin x|$, $x + \ |x|$, $2^{1/x}$.

Příklad 1.15. *Určete složky a definiční obor funkcí*

$$\sqrt{\cos x}, \quad \log \operatorname{tg} 2x, \quad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Příklad 1.16. *Nalezněte inverzní funkce k funkcím*

$$y_1 = \frac{2x-1}{3x+5}, \quad y_2 = 10^{x-3}, \quad y_3 = \frac{1}{x}, \quad y_4 = 2^{3x-1}, \quad y_5 = x + [x].$$

Řešení.

$$y_1^{-1} = \frac{5x+1}{2-3x}, \quad y_2^{-1} = \log_{10} x + 3, \quad y_3^{-1} = \frac{1}{x}, \quad y_4^{-1} = \frac{1}{3}(\log_2 x + 1).$$

Příklad 1.17. *Určete maximální definiční obor a obor hodnot funkce* $y = \sqrt{4 - x^2}$ *a nakreslete její graf.* $[D = \langle -2, 2\rangle,\ H = \langle 0, 2\rangle]$

Příklad 1.18. *Určete maximální definiční obor funkce* $y = \operatorname{cotg} x$ *a nakreslete její graf.* $[D = \{x \in (-\infty, \infty) : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}]$

Příklad 1.19. *Nakreslete graf funkce*

$$y = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-7, -6\rangle; \\ 0 & \text{pro } x \in (-5, 0); \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, 4); \\ x - 3 & \text{pro } x \in \langle 4, \infty). \end{cases}$$

U takto dané funkce máme definiční obor zadán. Jaká je to v tomto případě množina? $[D = (-7, -6\rangle \cup (-5, \infty)]$

Příklad 1.20. *Určete, které z funkcí v příkladech 1.17 - 1.19 jsou ohraničené, sudé, liché, periodické. Určete intervaly, na nichž jsou tyto funkce monotonní a ryze monotonní.*

Příklad 1.21. *Najděte periodickou funkci $y = f(x)$ s periodou $p = 2$ takovou, že na intervalu $\langle 0, 2)$ je $f(x) = g(x)$, kde*

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x \in \langle 0, 1); \\ 1 - x & \textit{pro } x \in \langle 1, 2). \end{cases}$$

Nakreslete graf této funkce.

Řešení.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 2k, 2k+1); \\ 2k+1-x & \text{pro } x \in \langle 2k+1, 2(k+1)), \end{cases}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné.

Příklad 1.22. *Najděte lichou periodickou funkci s periodou 2π a definičním oborem $D = (-\infty, \infty)$, která je na intervalu $(0, \pi)$ rovna 1. Nakreslete graf.*

Řešení.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi); \\ 0 & \text{pro } x = k\pi; \\ 1 & \text{pro } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \end{cases}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. Tuto funkci lze také zapsat takto:

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x).$$

Příklad 1.23. *Nakreslete graf funkce:*

1. $y = |x^2 - 3x + 2|$
2. $y = 2|x+1| - |3x+8| + 3$

2 Podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ a jejich vlastnosti

Příklad 2.1. *Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a C platí:*

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Řešení.

1. "$\subseteq$": $x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in A \cup B, x \in C \Rightarrow x \in A \vee x \in B, x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \vee x \in B \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   "$\supseteq$": $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cap C \vee x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \vee x \in B, x \in C \Rightarrow x \in A \cup B, x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap C$
2. "$\subseteq$": $x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \Rightarrow (x \in A, x \in B) \vee x \in C \Rightarrow x \in A \cup C, x \in B \cup C \Rightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$
   "$\supseteq$": $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup C, x \in B \cup C \Rightarrow x \in C \vee x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$

Příklad 2.2. *Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a C platí:*

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$

Řešení. "$\subseteq$": $x \in (A \cap B) \setminus C \Rightarrow x \in A \cap B, x \notin C \Rightarrow x \in A, x \in B, x \notin C \Rightarrow x \in A \setminus C, x \in B \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
"$\supseteq$": $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \Rightarrow x \in A \setminus C, x \in B \setminus C \Rightarrow x \in A, x \notin C, x \in B \Rightarrow x \in A \cap B, x \notin C \Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$

Příklad 2.3. *Určete (pokud existují)* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$*:*

1. $M = \{0, -1, 2, 5, 6, 8\}$
2. $M = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$
3. $M = \{n^2 - 2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$
4. $M = \langle 0, 1)$

Řešení.

1. $\max M = \sup M = 8$, $\min M = \inf M = -1$
2. $\max M = \sup M = 1$, $\inf M = 0$, $\min M$ neexistuje
3. $\max M$ neexistuje, $\sup M$ neexistuje, $\min M = \inf M = 0$

4. $\max M$ neexistuje, $\sup M = 1$, $\min M = \inf M = 0$

Příklad 2.4. *Dokažte tvrzení: Buď $M \neq \emptyset$, $M \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak*

$$\begin{aligned} a = \sup M \Leftrightarrow & 1)\ x \leq a\ \forall x \in M \\ & 2)\ \forall \epsilon > 0\ \exists x_1 \in M : x_1 > a - \epsilon \end{aligned}$$

Řešení. "$\Rightarrow$": $a = \sup M \Rightarrow x \leq a\ \forall x \in M$, čili platí 1). Předpokládejme, že 2) neplatí. Pak existuje $\epsilon_0 > 0$ tak, že $\forall x \in M$ je $x \leq a - \epsilon_0$. Tedy $a - \epsilon_0$ je horní závora množiny M, zároveň $a = \sup M \Rightarrow a \leq a - \epsilon_0$, spor. Platí tedy i 2).
"$\Leftarrow$": Nechť platí 1) a 2). Pak podle definice určitě platí $\sup M \leq a$. Předpokládejme, že $\sup M < a$. Položme $\epsilon = a - \sup M > 0$. Z 2) plyne, že $\exists x_1 \in M : x_1 > a - \epsilon = \sup M$, spor. Tedy $\sup M = a$.

Příklad 2.5. *Dokažte pro libovolné podmnožiny A, B množiny $\mathbb{R}$ a libovolná reálná čísla a, b, c:*

1. $a = \max M \Rightarrow a = \sup M$
2. $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$
3. $A \subseteq B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$
4. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
5. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$
6. $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$
7. $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$
8. $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$
9. $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$
10. $|a| = \max\{a, -a\} = -\min\{a, -a\}$
11. $\min\{a, \max\{b, c\}\} = \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\}$
12. $\max\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{\max\{a, b\}, \max\{a, c\}\}$

Řešení. 1. $a = \max M \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in M] \wedge a \in M \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in M] \wedge [(b \in \mathbb{R}, x \le b \ \forall x \in M) \Rightarrow a \le b] \Rightarrow a = \sup M$

2. Označme $a = \sup A$, $b = \sup B$. Pak platí: $b = \sup B \Rightarrow x \le b \ \forall x \in B \Rightarrow x \le b \ \forall x \in A \Rightarrow a \le b$, neboť $a = \sup A$.

3. analogicky

4. Označme $a = \sup A$, $b = \sup B$, $c = \sup(A \cup B)$, $d = \max\{\sup A, \sup B\}$.
Pak platí:
" $\le$ ": $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in A] \vee [x \le b \ \forall x \in B] \Rightarrow [x \le a \le d \ \forall x \in A] \vee [x \le b \le d \ \forall x \in B] \Rightarrow x \le d \ \forall x \in (A \cup B) \Rightarrow c \le d$
" $\ge$ ": $d = \max\{a, b\} \Rightarrow d = a \vee d = b \Rightarrow d \le c \vee d \le c$ podle 2 $\Rightarrow d \le c$

5. analogicky

6. Označme $a = \sup A$, $b = \sup B$, $c = \sup(A \cap B)$, $d = \min\{\sup A, \sup B\}$.
Pak platí:
$x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in A] \wedge [x \le b \ \forall x \in B] \Rightarrow [x \le a \ \forall x \in (A \cap B)] \wedge [x \le b \ \forall x \in (A \cap B)] \Rightarrow x \le d \ \forall x \in (A \cap B) \Rightarrow c \le d$

7. analogicky

8. $a \ge b : \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = b = \min\{a, b\}$
$a < b : \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = a = \min\{a, b\}$

9. analogicky

10. plyne z předchozích dvou

11. $a \ge b \wedge a \ge c : \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \max\{b, c\} =$
$= \min\{a, \max\{b, c\}\}$
$a < b \wedge a < c : \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \max\{a, a\} = a =$
$= \min\{a, \max\{b, c\}\}$
$a \ge b \wedge a < c : \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \max\{b, a\} = a =$
$= \min\{a, \max\{b, c\}\}$
$a < b \wedge a \ge c : \max\{\min\{a, b\}, \min\{a, c\}\} = \max\{a, c\} = a =$
$= \min\{a, \max\{b, c\}\}$

12. analogicky

Příklad 2.6. *Určete množiny dané těmito výrazy:*

1. $(1, \infty) \cap (-1, 2\rangle \qquad [(1, 2\rangle]$
2. $(0, \infty) \setminus (-1, 2) \qquad [\langle 2, \infty)]$
3. $((-\infty, -2) \cup \langle -2, 0)) \cup \langle 0, \infty) \qquad [(-\infty, \infty)]$
4. $\langle -1, 5\rangle \cap \langle 5, 100\rangle \qquad [\{5\}]$
5. $\langle -1, 10\rangle \cap \langle 15, 20\rangle \qquad [\emptyset]$
6. $\langle -1, 4)' \qquad [(-\infty, -1) \cup \langle 4, \infty)]$
7. $\langle 1, 5) \setminus (0, 5\rangle \qquad [\emptyset]$

Příklad 2.7. *Za předpokladu existence daných výrazů dokažte:*

1. $$\sup_{x\in A}[-f(x)] = -\inf_{x\in A} f(x)$$
2. $$\inf_{x\in A}[-f(x)] = -\sup_{x\in A} f(x)$$
3. $$\sup_{x\in A}[f(x) + g(x)] \leq \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)$$
4. $$\inf_{x\in A}[f(x) + g(x)] \geq \inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x)$$
5. *V 3 a 4 nelze nerovnosti nahradit rovnostmi.*

Řešení. 1.

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in A}[-f(x)] = c \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow [-f(x) \leq c \ \forall x \in A] \wedge [(b \in \mathbb{R}, -f(x) \leq b \ \forall x \in A) \Rightarrow c \leq b] \\
&\qquad \Rightarrow [f(x) \geq -c \ \forall x \in A] \wedge [(b \in \mathbb{R}, f(x) \geq -b \ \forall x \in A) \Rightarrow -c \geq -b] \\
&\qquad \Rightarrow \inf_{x\in A} f(x) = -c \Rightarrow \sup_{x\in A}[-f(x)] = c = -\inf_{x\in A} f(x)
\end{aligned}$$

2. analogicky

3. $$\begin{aligned} f(x) \le \sup_{x\in A} f(x), g(x) \le \sup_{x\in A} g(x)\ \forall x \in A \\ \Rightarrow f(x)+g(x) \le \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)\ \forall x\in A \\ \Rightarrow \sup_{x\in A}[f(x)+g(x)] \le \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x) \end{aligned}$$

4. analogicky

5. Stačí uvážit funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \cos x$ a množinu $A = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Příklad 2.8. *Dokažte:*

1. $\max\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \neq -1, n \in \mathbb{Z}\} = 2$

2. $\sup\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} = 1$

3. $\inf\{x : x = \frac{1}{n^2+1}, n \in \mathbb{Z}\} = 0$

4. $\max\{x : x = \frac{1}{n^2+1}, n \in \mathbb{Z}\} = 1$

5. $\sup(A\cup B\cup C) = 1$, *jestliže* $A = \{x : x = \frac{n^2}{n^2+1}, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x : x = \frac{n-3}{2n+1}, n \ge 0\}$

Řešení. 1. Pro $n = -2$ je $x = \frac{-2}{-1} = 2$. Dále $|\frac{n}{n+1}| = |1 - \frac{1}{n+1}| \le$ $\le 1 + |\frac{1}{n+1}| \le 2$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$.

2. Platí $\frac{n}{n+1} \le \frac{n+1}{n+1} = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dále buď $\epsilon > 0$ libovolné. Zvolíme=li $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\epsilon}$, pak
$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n} > 1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} > 1-\epsilon.$$

3. Platí $\frac{1}{n^2+1} \ge 0$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Dále buď $\epsilon > 0$ libovolné. Zvolíme=li $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, pak
$$\frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{1/\epsilon+1} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \epsilon.$$

4. Platí $\frac{1}{n^2+1} \le 1$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Pro $n = 0$ platí $x = \frac{1}{0+1} = 1$.

5. $\sup(A \cup B \cup C) = \sup((A \cup B) \cup C) = \max\{\sup(A \cup B), \sup C\} = \max\{\max\{\sup A, \sup B\}, \sup C\} = \max\{\sup A, \sup B, \sup C\}$. Protože $\sup A = 1$, $\sup B = 1$ a $\sup C = \frac{1}{2}$, je $\sup(A \cup B \cup C) = 1$.

3 Polynomy, racionální funkce

Příklad 3.1. *Proveďte dělení polynomů (se zbytkem, pokud vyjde):*

1. $(x^8 - x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$ $\quad [x^4 - 2x^2 + x + 1]$
2. $(2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1) : (x^2 - 3x + 1)$ $\quad [2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1]$
3. $(x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1) : (x^3 - 2x - 1)$ $\quad [x^3 + x^2 - x - 1]$
4. $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1)$ $\quad [2x^2 + 3x + 11, 25x - 5]$
5. $(x^3 - 3x^2 - x - 1) : (3x^2 - 2x + 1)$ $\quad [\frac{1}{9}(3x - 7), \frac{1}{9}(-26x - 2)]$

Příklad 3.2. *Pomocí Hornerova schématu proveďte dělení se zbytkem:*

1. $(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8) : (x - 1)$ $\quad [x^3 - x^2 + 3x - 3, 5]$
2. $(2x^5 - 5x^3 - 8x) : (x + 3)$ $\quad [2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109, -327]$

Příklad 3.3. *Pomocí Hornerova schématu vypočtěte hodnotu polynomu $P(x)$ v bodě x_0:*

1. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = 4$ $\quad [136]$
2. $P(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$, $x_0 = 2$ $\quad [18]$

Příklad 3.4. *Dokažte: Nechť $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ je polynom s celočíselnými koeficienty (tedy $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{Z}$) a nechť $\alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, p a q nesoudělná, je kořenem polynomu $P(x)$. Pak $p|a_n$ a $q|a_0$.*

Řešení. α je kořen $P(x) \Rightarrow 0 = P(\alpha) = a_0(\frac{p}{q})^n + \cdots + a_{n-1}(\frac{p}{q}) + a_n$. Protože $q \neq 0$, platí $0 = a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n$. Výsledek plyne z následujících dvou zápisů předchozí rovnice:

$$-a_nq^n = a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1}$$

a

$$-a_0p^n = a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n.$$

Příklad 3.5. *Rozložte polynom v reálném oboru:*

1. $2x^3 + 9x^2 + 3x - 4 \qquad [(x+1)(x+4)(2x-1)]$
2. $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2 \qquad [(x-1)(x+1)(x-2)(x^2 - x + 1)]$
3. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24 \qquad [(x+1)(x+2)(x+3)(x-4)]$
4. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \qquad [(x-1)(x-2)(x-3)]$
5. $x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8 \qquad [(x^2+1)(x-2)^3]$
6. $x^5 + x^2 \qquad [x^2(x+1)(x^2 - x + 1)]$
7. $x^4 - 15x^3 + 83x^2 - 359x + 290 \qquad [(x-1)(x-10)(x^2 - 4x + 29)]$
8. $x^3 - 4x^2 + x + 6 \qquad [(x-3)(x-2)(x+1)]$
9. $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 \qquad [(x+6)(x^2 + 2x + 3)]$
10. $x^3 + 1 \qquad [(x+1)(x^2 - x + 1)]$
11. $x^3 - 1 \qquad [(x-1)(x^2 + x + 1)]$
12. $x^4 - 1 \qquad [(x-1)(x+1)(x^2+1)]$
13. $x^4 + 1 \qquad [(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)]$
14. $x^4 - 4 \qquad [(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)]$
15. $x^4 + 4 \qquad [(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)]$
16. $x^5 + 1 \qquad [(x+1)(x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1)]$
17. $x^5 - 1 \qquad [(x-1)(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1)(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1)]$
18. $x^6 + 1 \qquad [(x^2+1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)]$
19. $x^6 - 1 \qquad [(x-1)(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)]$
20. $x^4 + x^2 - 2 \qquad [(x-1)(x+1)(x^2+2)]$
21. $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 \qquad [(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)]$
22. $x^3 + x^2 + x + 1 \qquad [(x+1)(x^2+1)]$

23. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \qquad [(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)]$

24. $x^4 + x^3 + x + 1 \qquad [(x + 1)^2(x^2 - x + 1)]$

Příklad 3.6. *Určete znaménko racionální funkce na jejím definičním oboru:*

1.
$$\frac{x^2 - 7x + 10}{(x-3)(x+2)(x+5)}$$

2.
$$\frac{(x-4)^4(x-1)^3(x^2+2)^5}{(x+2)(x+3)^6(x^2-2x+2)^3}$$

3.
$$\frac{x^5(x-3)(x^2+1)^3}{(x-1)^4(x+5)^5(x-2)(x^2+4)^5}$$

Příklad 3.7. *Zapište neryzí racionální funkci jako součet polynomu a ryzí racionální funkce:*

1.
$$\frac{2x^5 - 3x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2} \qquad [2x^3 - 2x^2 + 3x - 3 + \frac{10x - 4}{x^2 + x - 2}]$$

2.
$$\frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 22x - 71}{x^2 + 2x - 15} \qquad [x^2 + 5 + \frac{12x + 4}{x^2 + 2x - 15}]$$

3.
$$\frac{x^5 - x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3} \qquad [x + 1 + \frac{2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3}]$$

Příklad 3.8. *Rozložte racionální funkci na parciální zlomky:*

1.
$$\frac{12x + 7}{x^2 - 9x + 18} \qquad [\frac{-43}{3}\frac{1}{x-3} + \frac{79}{3}\frac{1}{x-6}]$$

2.
$$\frac{7x + 2}{x^3 + 8} \qquad [\frac{-1}{x+2} + \frac{x+3}{x^2 - 2x + 4}]$$

3.

$$\frac{1}{x^3(x+1)} \qquad [\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x+1}]$$

4.

$$\frac{-x^5+2x^4-2x^3+2x^2-x+1}{x^4(x^2+1)} \qquad [\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}]$$

5.

$$\frac{x^2-x+10}{(x^2-3x+10)^2} \qquad [\frac{1}{x^2-3x+10}+\frac{2x}{(x^2-3x+10)^2}]$$

6.

$$\frac{-2x^2+21x+35}{(x-3)(x+2)(x+5)} \qquad [\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x+2}-\frac{5}{x+5}]$$

7.

$$\frac{x+1}{(x^2+1)(x^3+x)} \qquad [\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}+\frac{-x+1}{(x^2+1)^2}]$$

8.

$$\frac{3x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x-2)} \qquad [\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+2}]$$

9.

$$\frac{-x^3-2x-1}{x^2(x^2-1)} \qquad [\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{-2}{x-1}+\frac{-1}{x+1}]$$

10.

$$\frac{3x^5+5x^4+3x^3+8x^2-2x+7}{(x^2-1)(x^2+1)^2} \qquad [\frac{2x}{x^2+1}+\frac{x-2}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{-2}{x+1}]$$

11.

$$\frac{6x^4-8x^3-2x^2-5x+3}{x(x^3-1)(x-1)} \qquad [\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}]$$

12.

$$\frac{2x^4-2x^3+x^2+1}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2} \qquad [\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}]$$

13.

$$\frac{x^2}{x^4-16} \qquad [\frac{1}{8(x-2)} - \frac{1}{8(x+2)} + \frac{1}{2(x^2+4)}]$$

14.

$$\frac{1}{x^4+4} \qquad [\frac{x+2}{8(x^2+2x+2)} - \frac{x-2}{8(x^2-2x+2)}]$$

15.

$$\frac{x^2}{x^6+27} \qquad [\frac{1}{18}\left(\frac{1}{x^2+3x+3} + \frac{1}{x^2-3x+3} - \frac{2}{x^2+3}\right)]$$

16.

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2} \qquad [\frac{x-1}{4(x^2+1)} + \frac{x+1}{2(x^2+1)^2} - \frac{1}{4(x+1)}]$$

17.

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2} \qquad [\frac{7}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{6x+2}{x^2+x+1} - \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}]$$

18.

$$\frac{1}{(x^4-1)^2} \quad [\frac{1}{16}\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1}\right) + \frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4(x^2+1)^2}]$$

19.

$$\frac{x}{x^3+1} \qquad [\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right)]$$

20.

$$\frac{3x^3+6x^2-38x+20}{x^4-x^3-4x^2+4x} \qquad [\frac{5}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x+2}]$$

21.

$$\frac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3} \qquad [1 + \frac{5}{x-2} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}]$$

22.

$$\frac{x-1}{x^4+3x^2+2} \qquad [\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{x-1}{x^2+2}]$$

23.

$$\frac{1}{x^4+1} \qquad [\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}x+2}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}x-2}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)]$$

4 Pojem limity funkce - vlastní limita

Příklad 4.1. *Dokažte, že pro funkce $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, libovolné konstanty a, $b \in \mathbb{R}$ a x, $x_0 \in \mathbb{R}$ platí:*

1. $$\lim_{x \to x_0} (a \cdot f(x)) = a \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

2. $$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

3. $$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

4. *Pokud*
$$\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

5. *Jestliže $\exists P(x_0)$ tak, že $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in P(x_0)$, pak*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

Příklad 4.2. *Dokažte, že platí:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Příklad 4.3. *Vypočítejte limity:*

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$ $[9]$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x - 4}$ $[-\frac{1}{4}]$ 3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$ $[-\frac{3}{5}]$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{2 - x}$ $[1]$ 5. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \cos 4x}$ $[1]$ 6. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$ $[-1]$

7. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x + 6}{x^3 + 8}$ $[\frac{1}{4}]$ 8. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$ $[-\frac{1}{2}]$ 9. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ $[0]$

10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}$ $[0]$ 11. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 + 2x - 60}$ $[\frac{3}{22}]$ 12. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$ $[\frac{1}{3}]$

13. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$ $[-\dfrac{2}{3}]$ 14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$ $[3]$

15. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$ $[-12]$ 16. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ $[\dfrac{4}{3}]$ 17. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ $[-2]$

18. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ $[\dfrac{1}{4}]$ 19. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$ $[\dfrac{1}{12}]$ 20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$ $[\dfrac{1}{4}]$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[7]{x}}$ $[0]$ 22. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$ $[0]$

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$ $[3]$ 24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{3x}$ $[\dfrac{5}{3}]$ 25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}$ $[3]$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$ $[1]$ 27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ $[1]$ 28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$ $[\dfrac{1}{3}]$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$ $[\dfrac{2}{3}]$ 30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$ $[\dfrac{1}{2}]$ 31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ $[-1]$

32. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$ $[\dfrac{1}{2}]$ 33. $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\dfrac{\pi}{2}-x)\operatorname{tg} x$ $[1]$ 34. $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x})$ $[0]$

35. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$ $[\dfrac{1}{2\pi^2}]$ 36. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$ $[\dfrac{9}{98}]$ 37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$ $[\dfrac{-5}{3}]$

38. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{\operatorname{tg}^2(\pi x)}$ $[\dfrac{1}{2}]$ 39. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$ $[3]$ 40. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin(\pi x)}$ $[-\dfrac{1}{12\pi}]$

41. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$ $[\dfrac{2}{\pi}]$ 42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$ $[\dfrac{1}{12}]$ 43. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$ $[6\sqrt{2}]$

44. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$ $[\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$ 45. $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}+\dfrac{1}{1+\cos x})$ $[2]$

46. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{tg}(\pi x)}{x+2}$ $[\pi]$ 47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$ $[-\dfrac{1}{10}]$

Příklad 4.4. *Je dána funkce f a reálná čísla x_0 a ϵ. Vypočítejte limitu $L=\lim_{x\to x_0+} f(x)$ a najděte číslo $\delta>0$ takové, že pro všechna $x\in P_\delta^+(x_0)$ je $f(x)\in O_\epsilon(L)$:*

1. $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 10^{-2}$ $[L = 0, \delta = 10^{-5}]$
2. $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 10^{-2}$ $[L = 1, \delta = 10^{-3}]$
3. $f(x) = 1 + \frac{1}{\ln x}$, $x_0 = 0$, $\epsilon = 10^{-1}$ $[L = 1, \delta = \mathrm{e}^{-10}]$