MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

Integrální počet

Poznámky pro předmět M1020

BRNO 2008

Petr Liška

Kapitola 1

Primitivní funkce, neurčitý integrál

V první polovině semestru jsme hledali derivaci nějaké funkce, teď budeme řešit úlohu obrácenou. Připomeňme důležitý pojem primitivní funkce.

Definice. Mějme dány funkce F, f definované v otevřeném intervalu I. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí

$$F'(x) = f(x),$$

říkáme, že **funkce** F je **primitivní funkcí k funkci** f v intervalu I.

Uvědomíme-li si, co se děje s konstantou při derivování snadno nahlédneme, že platí:

> Je-li funkce F v intervalu I primitivní k funkci f, pak každá primitivní funkce k funkci f je tvaru $F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$.

Libovolnou **primitivní funkci k funkci** f v intervalu I nazýváme **neurčitým integrálem funkce** f a značíme inf $f(x)\mathrm{d}x$. V této souvislosti funkci f nazýváme integrandem, symbol $\int$ integračním znakem, symbol $\mathrm{d}x$ neznačí diferenciál, ale slouží k odlišení proměnné. Hledání primitivní funkce se nazývá integrování.

1.1 Základní vzorce pro primitivní funkce

1. $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
4. $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
6. $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
7. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg} x + C$
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \mathrm{arctg} x + C$
10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+c}} = \ln|x + \sqrt{x^2+c}| + C$

$$\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

1.2 Příklady

Všechny následující integrály jdou spočítat přímo nebo pomocí úprav.

Příklad 1. Vypočítejte integrály

a) $\int 3x^5 \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x^2\sqrt{x}}{x^5} \mathrm{d}x$

d) $\int (5x^6 - 2x^4 + 3x - 1) \mathrm{d}x$

e) $\int (x^4 - x^2 \sqrt[5]{x^3}) \mathrm{d}x$

f) $\int (\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[4]{x^3}) \mathrm{d}x$

g) $\int (a + 3\cos x) \mathrm{d}x$

h) $\int (7\mathrm{e}^x - \frac{5}{x}) \mathrm{d}x$

i) $\int \mathrm{cotg}^2 x \mathrm{d}x$

j) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} \mathrm{d}x$

k) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$

l) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x$

m) $\int \sin^2 \frac{1}{2}x \mathrm{d}x$

n) $\int (3\sin^2 x + 3\cos^2 x) \mathrm{d}x$

Výsledky: a) $\frac{1}{2}x^6 + C,$ b)$-\frac{1}{3x^3} + C,$ c) $-\frac{2\sqrt{x}}{3x^2} + C,$ d)$\frac{5}{7}x^7 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 - x + C,$ e) $\frac{1}{6}x^6 - \frac{5}{23}x^4\sqrt[5]{x^3},$ f)$4\sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x} - \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C,$ g) $ax + 3\sin x + C$ h) $7\mathrm{e}^x - 5\ln|x| + C$ i) $-\mathrm{cotg}x - x + C$, j) $-2\cos x + C$, k) $2x - \mathrm{tg}x + C$, l)$\mathrm{tg}x - \mathrm{cotg}x + C$, m) $\frac{1}{2}(x - \sin x) + C$, n) $3x + C$

Kapitola 2

Substituční metoda

Substituční metoda je založena na větě o substituci (viz. přednáška nebo [**?**]). V podstatě jde o to, že nějakou funkci vyměníme za nějakou novou proměnou, např. funkci $g(x)$ nahradíme proměnou t, tj. $t = g(x)$. V integrálu ovšem potřebujeme i vyměnit symbol $\mathrm{d}x$ za symbol pro novou proměnou $\mathrm{d}t$. Jakým způsobem? Pro derivaci funkce $t = g(x)$ platí (viz. debata o diferenciálu) $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = g'(x)$ a tedy lze psát: $\mathrm{d}t = g'(x)\mathrm{d}x$ a tak nahradit $\mathrm{d}x$ symbolem $\mathrm{d}t$. Substituci je potřeba volit tak, aby ve výsledném integrálu byla pouze jen jedna proměnná, nemůžeme zároveň ve výrazu mít t i x!!!

Samozřejmě, otázkou je, jak zvolit funkci g(x), kterou budeme substituovat, v následujících příkladech ukážeme několik modelových situací, později se zaměříme na speciální substituce pro některé typy funkcí.

Příklad 2. Vypočtěte následující integrály

a) $\int (3x-4)^7 \mathrm{d}x$

b) $\int \mathrm{e}^{8x-1} \mathrm{d}x$

c) $\int \sin(3x+1) \mathrm{d}x$

a) Zaveďme substituci $t = 3x - 4$, tedy $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 3$, tedy $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$, dosadíme a můžeme integrovat

$$\int (3x-4)^7 \mathrm{d}x = \int t^7 \frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{1}{24}(3x-4)^8 + C$$

b) Substituce $t = 8x - 1$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{8}$. Po dosazení

$$\int \mathrm{e}^{8x-1}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \frac{\mathrm{d}t}{8} = \frac{\mathrm{e}^t}{8} + C = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{8x-1} + C$$

c) Substituce $t = 3x + 1$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$.

$$\int \sin(3x+1)\mathrm{d}x = \int \sin t \frac{\mathrm{d}t}{3} = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$$

Poznámka. Použití substituce v těchto příkladech je ovšem jako „jít s kanónem na vrabce“, všechny takovéto integrály se dají řešit v podstatě z hlavy, díky „pravidlu“

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b),$$

kde F je funkce primitivní k f (Pravidlo se dá odvodit díky substituci $t = ax + b$).

Příklad 3. Vypočtěte následující integrály

a) $\int \frac{1}{3x+2}\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

c) $\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x$

a) Substituce $t = 3x + 2$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 3$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$

$$\int \frac{1}{3x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C$$

b) Substituce $t = x^2 + 1$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2x}$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{t}\frac{\mathrm{d}t}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

c) Upravíme na $\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$, substituce $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}$

$$\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{t}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}\right) = -\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Poznámka. I v těchto příkladech je užití substituce trochu zbytečné. Můžeme použít, že

$$\int \frac{f(x)'}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

a vhodné úpravy. Například $\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$.

Příklad 4. Vypočtěte:

a) $\int \sin 7x\mathrm{d}x$

b) $\int 3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

c) $\int 5k\cos\frac{8}{3}x\mathrm{d}x$

d) $\int 2\mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x$

e) $\int (3x-7)^{14}\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{1}{4x^2+1}\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{4}{x-6}\mathrm{d}x$

h) $\int \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$

i) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$

j) $\int \frac{4x^3+1}{x^4+x}\mathrm{d}x$

Výsledky: a) $-\frac{1}{7}\cos 7x + C$, b)$-3\mathrm{e}^{-x} + C$, c)$\frac{15}{8}k\sin\frac{8}{3}x + C$, d)$\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x-1} + C$, e) $\frac{1}{5}(3x-7)^{15} + C$, f) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2x+1) + C$, g)$4\ln|x-6| + C$, h)$\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$, i) $\ln|\sin x| + C$, j) $\ln|x^4+x| + C$

Příklad 5. Vypočtěte následující integrály

a) $\int 10x(x^2+13)^{12}\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$

a) Substituce $t = x^2+13$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2x}$

$$\int 10x(x^2+13)^{12}\mathrm{d}x = \int 10x\cdot t^{12}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{2x} = 5\int t^{12}\mathrm{d}t = \frac{5}{13}t^{13} + C = \frac{5}{13}(x^2+13) + C$$

b) Substituce $t = \ln x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$, $\mathrm{d}x = x\mathrm{d}t$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{x}x\mathrm{d}t = \int t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

c) Substituce $t = x^2$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2x}$

$$\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x = \int \frac{4x}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{2x} = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 2\arcsin t + C = 2\arcsin x^2 + C$$

Poznámka. Někdy je najít vhodnou substituci velice snadné, stačí prostě substituovat „nepohodlný výraz“, někdy je to ovšem složitější a chce to trochu citu :-)

Poznámka. Často se vyskytuje tento integrál $\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$. K řešení vede substituce, která ne každého napadne. Substituce $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t$, tedy $\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t$ $= \int \cos^2 t\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) = \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) = \frac{1}{2}(t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}) =$ $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$

Příklad 6. Vypočtěte následující integrály užitím vhodné substituce:

a) $\int x(x^2-1)^{10}\mathrm{d}x$

b) $\int 8x^2(x^3+2)^5\mathrm{d}x$

c) $\int 3x\sqrt[4]{x^2+5}\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{3x}{(x^2+4)^3}\mathrm{d}x$

e) $\int 5x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{7\ln^4 x}{x}\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$

h) $\int \mathrm{e}^{\cos 2x} \cdot \sin x\cos x\mathrm{d}x$

i) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

j) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

Výsledky: a) $\frac{1}{22}(x^2-1)^{11}+C$, b) $\frac{4}{9}(x^3+2)^6+C$ c) $\frac{6}{5}(x^2+5)\sqrt[4]{x^2+5}+C$ d) $-\frac{3}{4(x^2+4)^2}+C$ e) $\frac{5}{2}\mathrm{e}^{x^2}+C$ f) $\frac{7}{5}\ln^5|x|+C$ g) $\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}(\mathrm{e}^x+2)$ h) $-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\cos 2x}+C$, i) $-\sin\frac{1}{x}+C$, h) $-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\cos 2x}+C$, j) $\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$ (užijte $x = \sin t$)

Kapitola 3

Metoda per partes

Věta. *Nechť funkce u(x) a v(x) mají v intervalu I spojité derivace. Potom platí:*

$$\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'x\mathrm{d}x$$

Ilustrujme užití na následující dvojici integrálů.

a) $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, zvolme $u' = \mathrm{e}^x$ a $v = x$, tedy $u = \mathrm{e}^x$, $v' = 1$, tedy

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x-1) + C$$

b) $\int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x$, zvolme $u' = \mathrm{e}^x$ a $v = \cos x$, tedy $u = \mathrm{e}^x$, $v' = -\sin x$, tedy

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x.$$

Užijme metodu per partes ještě jednou, zvolme $u' = \mathrm{e}^x$ a $v = \sin x$, tedy $u = \mathrm{e}^x$, $v' = \cos x$, tedy

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x$$

Dostali jsme stejný integrál jako na začátku, na celou rovnost se můžeme dívat jako na rovnici a vyjádřit

$$\int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x)$$

Příklad 7. Vypočtěte následující integrály užitím metody per partes, popř. kombinací metody per partes a substituce:

a) $\int x \sin x \mathrm{d}x$ b) $\int \ln x \mathrm{d}x$

c) $\int x^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ d) $\int x \ln^2 x \mathrm{d}x$

e) $\int (x^3 + x^2)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ f) $\int \mathrm{arctg} x \mathrm{d}x$

g) $\int \sin(\ln x) \mathrm{d}x$ h) $\int 2^x \sin 2x \mathrm{d}x$

i) $\int x^3 \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x$ j) $\int x^2 \arccos x \mathrm{d}x$

Výsledky: a) $-x\cos x + \sin x + C$, b) $x \ln x - x + C$, c) $\mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + C$, d) $\frac{x^2}{2}(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) + C$, e) $\mathrm{e}^x(x^3 - 2x^2 + 4x - 4) + C$, f) $x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$, g) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x) + C$, h) $-\frac{2^x(2\cos 2x - \ln 2 \sin 2x)}{\ln^2 2 + 4} + C$, i) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}(x^2 - 1) + C$ j) $\frac{1}{3}x^3 \arccos x - \frac{2}{9}\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{9}x^2\sqrt{1 - x^2}$

Kapitola 4

Integrace racionálních lomených funkcí

Omezme se na integraci ryze lomených funkcí (každou neryze lomenou na ně umíme převést dělením na součet polynomu a ryze lomené funkce). Takovouto funkci umíme vždy rozložit na parciální zlomky, přičemž zlomky, které se v rozkladu vyskytují jsou jednoho z následujících typů:

1. $\frac{a}{x-x_0}$ - zavedeme substituci $t = x - x_0$, popř. vypočteme „z hlavy“ užitím $\int \frac{f(x)'}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln |f(x)| + C$

2. $\frac{a}{(x-x_0)^n}$ - zavedeme substituci $t = x - x_0$, popř užijeme $\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$

3. $\frac{bx+c}{(x-x_0)^2+a^2}$ - upravíme čitatetele tak, abychom v něm dostali derivaci jmenovatele $\pm$ číslo, rozdělíme na dva zlomky, v prvním užijeme $\int \frac{f(x)'}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln |f(x)|$, v druhém vzorce
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-x_0)^2+a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x-x_0}{a} (x_0 \in \mathbb{R}, a > 0)$$

4. $\frac{bx+c}{((x-x_0)^2+a^2)^n}$ - tento typ se v našich příkladech nevyskytne, návod, jak ho řešit, lze nalézt v každé učebnici integrálního počtu.

Příklad 8. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{x^2+2x+6}{x(x-1)^3}\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{x-1}{x^4+3x^2+2}\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$

Tečky ve výpočtu značí rozklad na parciální zlomky.

a) $\int \left(\frac{x^2+2x+6}{x(x-1)^3}\right)\mathrm{d}x = \ldots = \int \frac{9}{(x-1)^3} - \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{6}{x-1} - \frac{6}{x}\mathrm{d}x = 9\int \frac{1}{(x-1)^3}\mathrm{d}x - 5\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + 6\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x - 6\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\frac{9}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + 5\frac{1}{x-1} + 6\ln|x-1| - 6\ln|x| + C$

b) $\int \frac{x-1}{x^4+3x^2+2}\mathrm{d}x = \ldots = \int \frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int \frac{x-1}{x^2+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x\right) - \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x}{x^2+2}\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x^2+2}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

c) $\int \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} - 3\frac{1}{6}\int \frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}) + C$

Příklad 9. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3}\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2-2x+3)}\mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{1}{x^4-1}\mathrm{d}x$

e) $\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+2x}\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{4x^2-8}{(x-1)^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$

Výsledky: a) $x-\frac{1}{2x^2}-3\ln|x|+5\ln|x-2|+C$ b) $\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$ c) $\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$ d) $\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$ e) $\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}\ln(x^2+2x+2)-\frac{3}{2}\mathrm{arctg}(x+1)+C$ f) $\frac{2}{x-1}+2\ln(x-1)-\ln(x^2-1)+4\mathrm{arctg}x+C$

Kapitola 5

Integrály typu R($\sqrt[r]{x}$)

Jedná se o integrály funkcí, které obsahují proměnnou x pod odmocninou. Volíme substituci $x = t^n$, kde n je nejmenší společný násobek všech r, např. máme-li výraz $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[2]{x}-\sqrt[3]{x}}$, volíme substituci $x = t^6$, protože 6 nejmenší společný násobek čísel 2 a 3. Taková substituce převede hledaný integrál na integrál z racionální funkce.

Příklad 10. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\mathrm{d}x$

a) Zavedeme substituci $x = t^3$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3t^2, \mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}\mathrm{d}x = \int \frac{t}{t^3-1}3t^2\mathrm{d}t = 3\int \frac{t^3}{t^3-1}\mathrm{d}t$$

Daný integrál jsme převedli na integrál z racionální lomené funkce, který už umíme řešit, výsledek je

$$3t + \ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln t^2 + t + 1 - \sqrt{3}\mathrm{arctg}(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}),$$

stačí se vrátit k proměnné x, $t = \sqrt[3]{x}$.

b) Zavedeme substituci $x = t^6$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 6t^5, \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\mathrm{d}x = \int \frac{t^3}{t^2+1}6t^5\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

Máme opět integrál z racionální lomené funkce, který vypočteme a dostaneme:

$$6(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \mathrm{arctg} x) + C$$

a vrátíme se k proměnné x díky $t = \sqrt[6]{x}$.

Příklad 11. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+x} \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x$

d) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} \mathrm{d}x$

Výsledky:

a) $2\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x} - 1| - \ln|\sqrt{x} + 1| + C$

b) $2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x} + 1| + C$

c) $\frac{3}{4}\sqrt[6]{x}^2 + x + \frac{3}{2}\sqrt[6]{x}^4 + 3\sqrt[6]{x^2} + 3\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + 3\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C$

d) $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x}^5 + 3\sqrt[3]{x} + 2\ln|\sqrt[6]{x} - 1| - \ln|\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + 1| + 2\sqrt{3}\mathrm{arctg}\frac{(2\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt{3}} + C$

Kapitola 6

Integrály typu $R(\sin x, \cos x)$

Jedná se o integrály, které obsahují „siny a cosiny“. Rozebereme pouze jeden typ a to

$$\int \sin^n x \cos^m x \mathrm{d}x$$

Všechny takové integrály převedeme substitucí $t = \sin x$ nebo $t = \cos x$ na integrály polynomů nebo racionálních lomených funkcí.

a) Je-li n liché a m sudé nebo nula volíme substituci $t = \cos x$

b) Je-li m liché a n sudé nebo nula volíme substituci $t = \sin x$

c) Jsou-li m i n lichá volíme substituci $t = \cos x$ nebo $t = \sin x$

d) Jsou-li m i n sudá čísla nebo jedno z nich je nula, užijeme vzorce $\cos^2 x = \frac{1+\cos x}{2}$ (popř. $\sin^2 x = \frac{1-\cos x}{2}$), čímž snížíme mocninu daného výrazu na polovinu a volíme opět jednu z možností a) - d).

Příklad 12. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \sin^2 x \cos^5 x \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \mathrm{d}x$

a) Zavedeme substituci $t = \sin x$, tedy $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos x}$

$\int \sin^2 x \cos^5 x \mathrm{d}x = \int t^2 \cos^5 x \frac{\mathrm{d}t}{\cos x} = \int t^2 (\cos^2 x)^2 \mathrm{d}t = \int t^2 (1 - \sin^2 x)^2 \mathrm{d}t = \int t^2 (1 - t^2)^2 \mathrm{d}t = \int t^6 - 2t^4 + t^2 \mathrm{d}t = \frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{7} \sin^6 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{3} \sin^3 x + C$

b) Zavedeme např. substituci $t = \cos x$, tedy $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x$, $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}$

$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \mathrm{d}x = -\int \frac{\sin x}{t^3} \frac{\mathrm{d}t}{\sin x} = -\int t^3 \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \cos^4 + C$

Příklad 13. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \sin^5 x \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$

c) $\int \sin^3 x \cos^3 x \mathrm{d}x$

d) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} \mathrm{d}x$

Výsledky:

a) $-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2 \cos^3 x}{3} - \cos x + C$

b) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$

c) $\frac{\cos^6 x}{6} - \frac{\cos^4 x}{4} + C$

d) $-\frac{1}{3 \sin^3 x} + C$

Kapitola 7

Určitý integrál

Odvození toho, co to určitý integrál je, je možno nalézt v každé učebnici integrálního počtu. Přistupme tedy rovnou k některým důležitým pravidlům.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b g(x)\mathrm{d}x, c \in (a, b)$$

Věta (Newton - Leibnizova formule)**.** *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $[a, b]$ a nechť $F(x)$ je primitivní k funkci $f(x)$ v $[a, b]$. Potom platí*

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a).$$

Věta (o integraci per partes)**.** *Nechť funkce u(x), v(x) mají v intervalu [a, b] spojité derivace. Potom platí*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$$

Integrace metodou substituce probíhá jako při výpočtu neurčitého integrálu, jen je však potřeba přepočítat i meze!!! Máme-li substituci $x = f(t)$, dosadíme do ní staré meze za x, vypočítáme t a to jsou nové meze.

Příklad 14. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int_1^3 (x^2+2x)\mathrm{d}x$

b) $\int_1^2 \frac{x^4-1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

c) $\int_1^e x\ln x \mathrm{d}x$

d) $\int_1^2 x(2x^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$

Výsledky: a)$16\frac{2}{3}$ b)$\frac{4}{3}$ c)$\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}$ d)$\frac{7}{6}\sqrt{7}-\frac{1}{6}$

7.1 Geometrické aplikace

Příklad 15. Vypočítejte obsah rovinného obrazce omezeného:

a) Funkcí $f(x) = -x^2+2$, osou x a přímkami $x=-1, x=1$

b) Funkcemi $f(x) = x^2, g(x) = x^2+4$ a přímkami $x=-2, x=2$

c) Funkcemi $f(x) = x^2, g(x) = 4$

d) Funkcemi $f(x) = x^2-2x+3, g(x) = -2x^2+4x+3$

e) Funkcemi $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$

f) Funkcemi $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = 3-x$

g) Funkcemi $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 4x, h(x) = \frac{1}{4}x$

h) Funkcemi $f(x) = x^2-2x, g(x) = x, h(x) = -x^2+2x+6$

Výsledky: a)$\frac{10}{3}$ b)16 c)$\frac{32}{3}$ d)4 e)$\frac{1}{3}$ f)$\frac{3}{2}-\ln 4$ g)$\ln 4$ h)4

Příklad 16. Vypočítejte objem rotačního tělesa vzniklého rotací útvaru ohraničeného křivkami (viz dále) kolem osy x:

a) $y=x, y=\frac{1}{x}, y=0, x=2$

b) $y=x^2, y=x$

c) $y=x^2+3, x=-1, x=1, y=0$

d) $y=1-x^2, y=x^2$

Výsledky: a)$\frac{5}{6}\pi$ b)$\frac{2}{15}\pi$ c)$\frac{112}{5}\pi$ d)$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

Pro procvičení si též můžete odvodit všechny vzorečky známe vzorečky ze střední školy pro objemy a povrchy koule, kužele, válce, komolého kužele, obvod kružnice atd.

Kapitola 8

Nevlastní integrál

Příklad 17. Vyšetřete následující integrály:

a) $\int_0^1 x \ln x \mathrm{d}x$

b) $\int 0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-1} \mathrm{d}x$

d) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} \mathrm{d}x$

e) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \sin x \mathrm{d}x$

f) $\int_{-1}^1 \ln |x| \mathrm{d}x$

Výsledky: a)$\frac{1}{4}$ b)2 c)diverguje d)$\frac{1}{3}$ e)$\frac{1}{2}$ f)-2