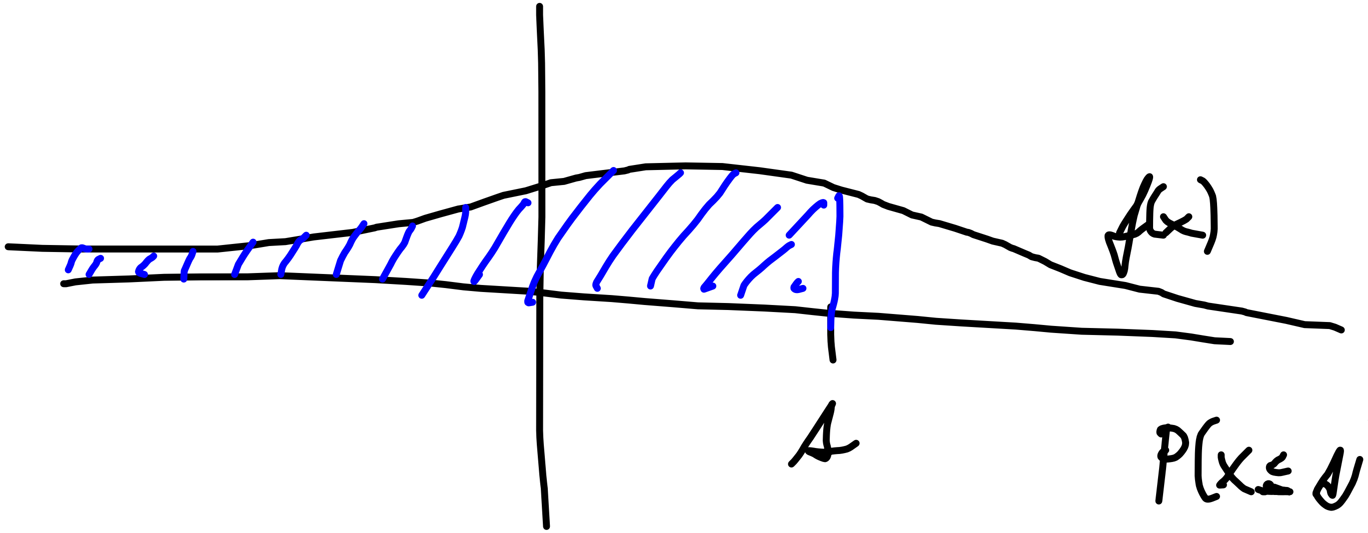
Pro hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ náh. veličiny platí: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$



$P(X \le s) = F(s) = \int_{-\infty}^{s} f(s)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} a x^2\,dx = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}a \Rightarrow f(x) \text{ je hustota} \Leftrightarrow a = \frac{3}{8}$$

Střední hodnota náhodné veličiny X

a) pro diskrétní náhodnou veličinu nabývající hodnot x_i definujeme

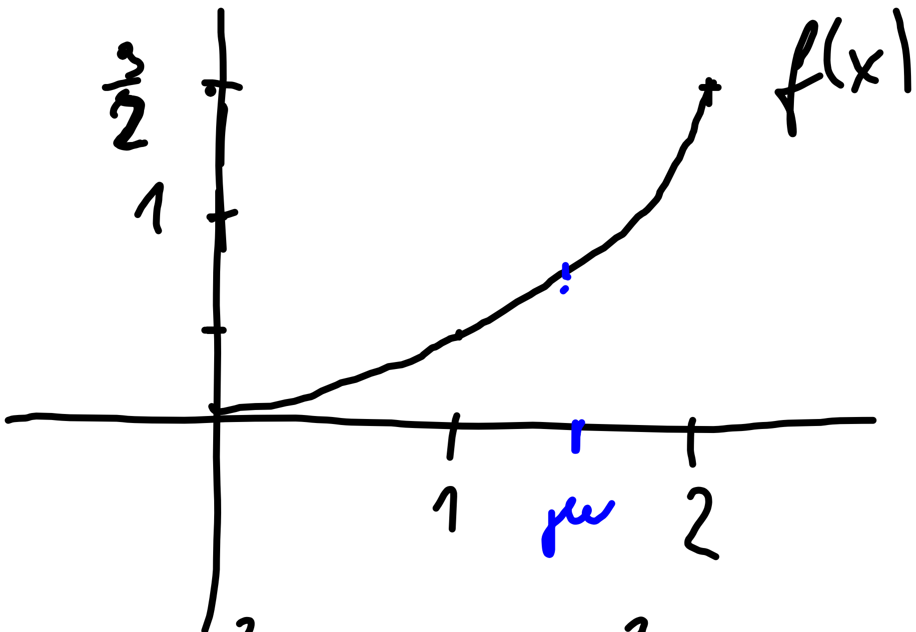
$$EX = \sum_i x_i \, p(x_i)$$

b) pro spojitou náhodnou veličinu je to

tj. $$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx ,$$

kde $f(x)$ je hustota psti veličiny X

$f(x) = \frac{3}{8}x^2$



$\mu = \int_0^2 x \cdot f(x) = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{2}$

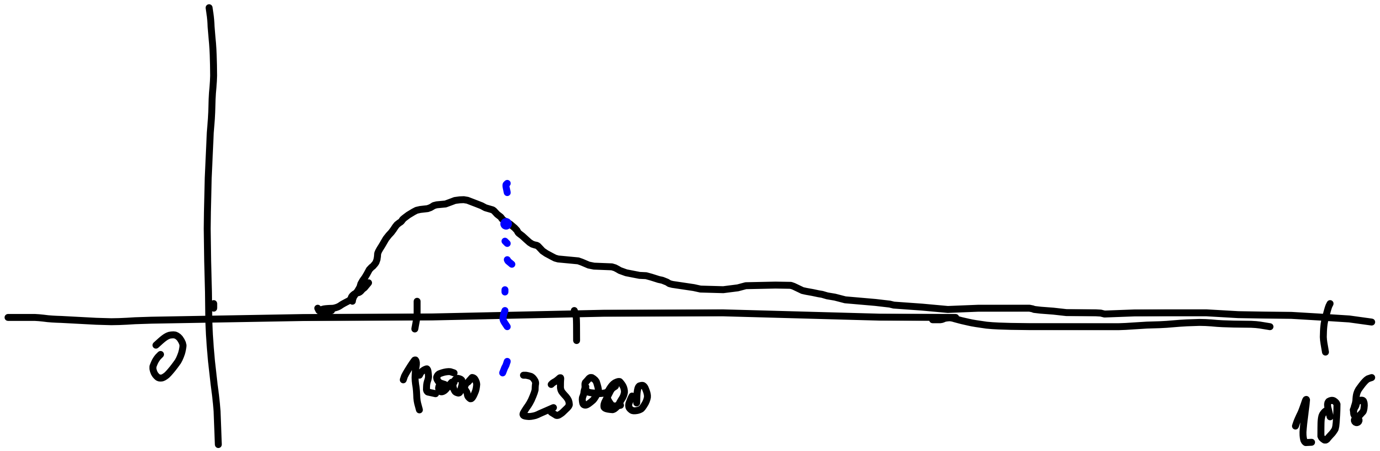
medián náhodné veličiny X je číslo m takové, že

$P[X \leq m] = P[X > m] = \frac{1}{2}$

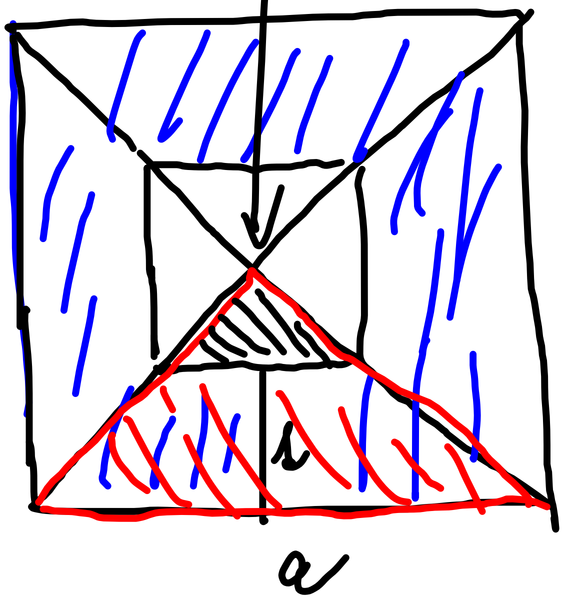
$$P[X \le m] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^m \frac{3}{8} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^m = \frac{1}{8} m^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \sqrt[3]{4} \doteq 1{,}59$$



$S_{\square}$ $\quad 2^2\left(\frac{a}{2}-l\right)^2$



Spočtejme distr. funkci náhodné veličiny udávající vzdálenost dítěte od nejbližší strany lesa:

Zřejmě $F(l) = 0$ pro $l < 0$

$F(l) = 1$ pro $l \geq \frac{a}{2}$

Nechť $0 < l < \frac{a}{2}$: $F(l) = P(X \leq l) = 1 - \frac{4\left(\frac{a}{2}-l\right)^2}{a^2} =$

$$= 1 - 4\cdot\frac{\frac{a^2}{4} - al + l^2}{a^2} = 1 - 1 + 4\,\frac{l(a-l)}{a^2} = \boxed{\frac{4l(a-l)}{a^2}}$$

pro každou pebi pak máme:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pro } x\le 0\\ \frac{4}{a^3}(a-2x) & \text{pro } 0<x\le \frac{a}{2}\\ 0 & \text{pro } x>\frac{a}{2}\end{cases}$$

Spojitá náhodná veličina s hustotou pstí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

je veličina s normovaným normálním rozdělením.

Pozn. Distribuční fce veličiny s normálním rozdělením neumíme explicitně vyjádřit

(tj. $\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$ je vyšší fce)

Nicméně umíme spočítat $\int^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}\, dx\, dy$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & \\ y = r\sin\varphi & J = r \end{array}\right] = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} r\, e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r\, e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-s}\, ds = 2\pi \underbrace{\left[-e^{-s}\right]_0^{\infty}}_{1} =$$

$$s = \frac{r^2}{2}$$
$$ds = r\, dr$$

$$= 2\pi$$

Rozptyl náhodné veličiny X

$$\operatorname{var} X = \sigma^2 \begin{cases} = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p(x_i) & \text{pro diskrétní} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx & \text{pro spojité} \end{cases}$$

Centrální limitní věta

$Y_1, Y_2, \ldots$ posloupnost náh. veličin takových, že

$$EY_i = \mu$$

$$\operatorname{var} Y_i = \sigma^2 > 0$$

$$E|Y_i| < \infty \quad , \text{ tak}$$

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - \mu}{\sigma} \right)$$

je náhodná veličina taková, že

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} P[S_n \leq x]} = \Phi[x]$$

kde $\Phi[x]$ je distr. fce normálního rozdělení.

Je-li X náh. veličina s rozdělením $Bi(n, p)$, pak $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, kde $Y_i \sim Bi(1, p)$ a tedy

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right) = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{n\to\infty} N(0, 1)$$

Hranolky :

(cíl ... dostat tam nějak $\dfrac{X-100\cdot 0{,}2}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)}} = \dfrac{X-20}{4}$)

$$P(X \geq 10) = $$

$$= P\left(\frac{X-20}{4} \geq \frac{10-20}{4}\right) = P\left(\underbrace{\frac{X-20}{4}}_{\sim N(0,1)} \geq -2{,}5\right)$$

(Zajímá mě $\displaystyle\int_{-2{,}5}^{\infty} \Phi(x)\,dx = 1 - \int_{-\infty}^{-2{,}5} \Phi(x)\,dx = 1 - \int_{2{,}5}^{\infty} \Phi(x)\,dx$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \int_{2{,}5}^{\infty} \Phi(x)\,dx\right) = \frac{1}{2} + \left(\int_{0}^{2{,}5} \Phi(x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + 0{,}4938 = 0{,}9938$$

Označme p … zlomek udávající skutečnou popularitu strany v celé populaci $(0 \le p \le 1)$

Nechť vzorek čítá n lidí a nechť X je počet příznivců dané strany mezi n vybranými.

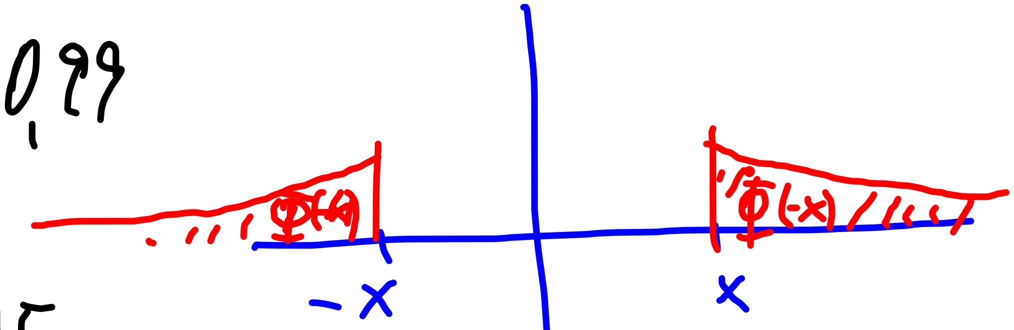
Chceme $\quad P\left[\left|\frac{X}{n}-p\right| \le 0{,}02\right] \ge 0{,}99$

$$P\left[-0{,}02 \le \frac{X}{n}-p \le 0{,}02\right] = P\left[-0{,}02n \le X-np \le 0{,}02n\right] =$$

$$= P\left[\frac{-0{,}02n}{\sqrt{np(1-p)}} \le \underbrace{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{\approx N(0,1)} \le \frac{0{,}02n}{\sqrt{np(1-p)}}\right] =$$

$$= \Phi\left(\frac{0{,}02n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{0{,}02n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{0{,}02\,n}{\sqrt{n\mu(1-\mu)}}\right) - 1 \geq 0{,}99$$



$$\Phi\left(\frac{0{,}02\,n}{\sqrt{n\mu(1-\mu)}}\right) \geq 0{,}995$$

$$\Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$$

$$[\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{0{,}02\,n}{\sqrt{n\mu(1-\mu)}} \geq 2{,}576}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 50 \cdot 2{,}576 \cdot \underbrace{\sqrt{\mu(1-\mu)}}_{\geq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{0{,}02n}{\sqrt{\dots}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \geq 0{,}995$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{(50 \cdot 2{,}576)^2}{2} \doteq 4147$$