Vzorečky ke 13. sadě

Výpočet simultánní hustoty. Následuje důkaz toho, že simultánní hustotu vektoru, jehož složky jsou nezávislé, lze počítat jako součin marginálních hustot.

Pro nezávislé náhodné veličiny X, Y s hustotami pravděpodobnosti φ_X, φ_Y a distribučními funkcemi Φ_X, Φ_Y je simultánní distribuční funkce Φ náhodného vektoru (X, Y) rovna součinu

$$\Phi(x, y) = \Phi_X(x) \cdot \Phi_Y(y).$$

Vztah mezi hustotou a distribuční funkcí:

$$\varphi_X(x) = \frac{\partial \Phi_X}{\partial_x}(x),$$

$$\varphi_Y(y) = \frac{\partial \Phi_Y}{\partial_y}(y).$$

(Simultánní) hustotu φ náhodného vektoru spočítáme jako druhou parciální derivaci Φ podle proměnných x, y (nezáleží na pořadí, v jakém derivujeme):

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial_x} \left(\frac{\partial(\Phi_X \cdot \Phi_Y)}{\partial_y}(x, y) \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial_x} \left(\frac{\partial \Phi_X}{\partial_y}(x) \cdot \Phi_Y(y) + \Phi_X(x) \cdot \frac{\partial \Phi_Y}{\partial_y}(y) \right) = *$$

protože Φ_X je konstanta vzhledem k y, je $\frac{\partial \Phi_X}{\partial_y}(x) = 0$, takže

$$* = \frac{\partial}{\partial_x} \left(\Phi_X(x) \cdot \frac{\partial \Phi_Y}{\partial_y}(y) \right) = \frac{\partial \Phi_X}{\partial_x}(x) \cdot \frac{\partial \Phi_Y}{\partial_y}(y) + \Phi_X(x) \cdot \frac{\partial}{\partial_x} \frac{\partial \Phi_Y}{\partial_y}(y) = **$$

přičemž $\frac{\partial \Phi_Y}{\partial_y}(y)$ (to je rovno hustotě φ_Y) je vůči proměnné x konstantní, takže $\frac{\partial}{\partial_x} \frac{\partial \Phi_Y}{\partial_y}(y) = 0$ a proto

$$** = \frac{\partial \Phi_X}{\partial_x}(x) \cdot \frac{\partial \Phi_Y}{\partial_y}(y) = \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y).$$

Tím jsme dokázali, že opravdu je možné spočítat hustotu pravděpodobnosti vektoru (X, Y) (simultánní hustotu) pro nezávislé náhodné veličiny X, Y jako součin hustot X a Y.

Testování hypotéz. Vzorečky jsou v listech nascanovaných z knihy Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (M. Budíková a kol.) v souboru *matikaIV_statistika13_hypotezy.zip* ve studijních materiálech, zejména *na straně 73*, když se tam objeví neznámý symbol (např. S_1^2), najdete jeho definici na předchozích stranách.

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ znamená $z(\alpha)$ u normálního rozdělení, $t(n-1)_{1-\frac{\alpha}{2}}$ u Studentova rozdělení se stupněm volnosti $n-1$.

Příklad na testování hypotéz. Na základě statistik pěti slimáků (12, 20, 13, 15) a čtyř plzáků (60, 65, 63, 56) otestujte na desetiprocentní hladině hypotézu, že dvojnásobek průměrného počtu okousaných kedluben od slimáka v řádné sezóně se liší od poloviny průměrného počtu okousaných kedluben od plzáka. Použité statistiky jsou obě ze stejného zdroje (takže neznáme sice rozptyly, ale považujeme je za stejné).

Řešení: Označme počet okousaných kedluben od slimáka X_1 a od plzáka X_2 (střední hodnoty těchto veličin jsou označeny μ_1 a μ_2).

Statistiky pěti slimáků (12, 20, 13, 15) a čtyř plzáků (60, 65, 63, 56), takže $n_1 = 5$ a $n_2 = 4$.

$h(\vartheta) = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = 2\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2$.

Hypotéza zní: $2\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2 \neq 0$?

Použijeme vzorečky ze str. 73 a str. 74 ze scanů (případ 13.4 b)).

Dál je dobré pročíst návod na str. 81 a str. 82.

(Budeme hledat $(100 - 10)\%$ interval spolehlivosti pro $2\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2$ a ptát se, zda obsahuje nulu.)

TO BE CONTINUED V NEDĚLI ODPOLEDNE