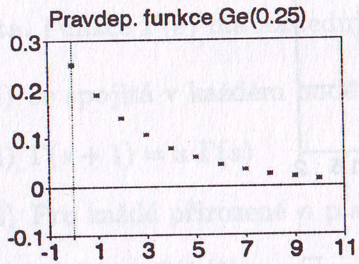
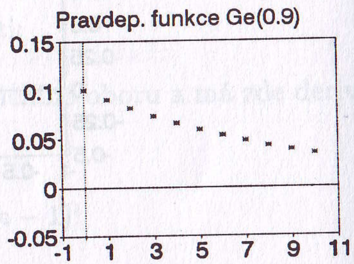
4. Geometrické rozložení $Ge(\vartheta)$

Náhodná veličina $X \sim Ge(\vartheta)$ udává celkový počet „neúspěchů“, které v nekonečné posloupnosti nezávislých opakovaných pokusů předcházejí prvnímu „úspěchu“. Pravděpodobnost „úspěchu“ v každém pokusu je ϑ, kde $\vartheta \in (0,1)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} (1-\vartheta)^x \cdot \vartheta & \text{pro } x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = (1-\vartheta)/\vartheta, D(X) = (1-\vartheta)/\vartheta^2$$



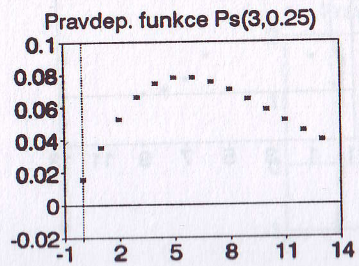


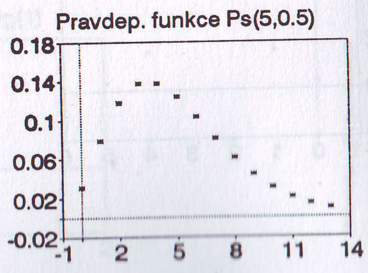
5. Pascalovo rozložení $Ps(k, \vartheta)$

Náhodná veličina $X \sim Ps(k, \vartheta)$ udává celkový počet „neúspěchů“, které v nekonečné posloupnosti nezávislých opakovaných pokusů předcházejí k-tému „úspěchu“. Pravděpodobnost „úspěchu“ v každém pokusu je ϑ, $\vartheta \in (0,1)$, k je přirozené číslo. Pro $k = 1$ dostaneme geometrické rozložení.

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{x+k-1}{x}(1-\vartheta)^x \vartheta^k & \text{pro } x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = k(1-\vartheta)/\vartheta, D(X) = k(1-\vartheta)/\vartheta^2$$



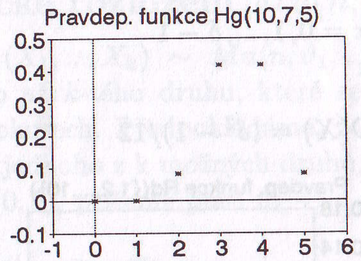


6. Hypergeometrické rozložení $Hg(N, M, n)$

V souboru N prvků je M prvků označeno $(M \leq N)$. Ze souboru náhodně vybereme n prvků bez vracení $(n \leq N)$. Náhodná veličina $X \sim Hg(N, M, n)$ udává počet vybraných označených prvků.

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{pro } x = \max\{0, M-N+n\}, \ldots, \min\{n, M\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = \tfrac{Mn}{N}, D(X) = \tfrac{Mn}{N}\left(1 - \tfrac{M}{N}\right)\tfrac{N-n}{N-1}$$



7. Vícerozměrné hypergeometrické rozložení $Hg(N, M_1, \ldots, M_k, n)$

Náhodný vektor $(X_1, \ldots, X_k) \sim Hg(N, M_1, \ldots, M_k, n)$ udává počet prvků prvního až k-tého druhu ve výběrovém souboru bez opakování o rozsahu n, který jsme vylosovali ze základního souboru rozsahu N, který se skládá z M_1 prvků prvního druhu atd., až z M_k prvků k-tého druhu, přičemž $M_1 + \ldots + M_k = N$. Čísla $N, M_1, \ldots, M_k, n$ jsou přirozená.

$\pi(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\binom{M_1}{x_1}\cdots\binom{M_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$ pro $x_1 \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ldots, x_k \in \{0, 1, \ldots, n\}, x_1 + \ldots + x_k = n$

$\pi(x_1, \ldots, x_k) = 0$ jinak

Pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ platí:

$$E(X_i) = \tfrac{nM_i}{N}, D(X_i) = \tfrac{nM_i}{N}\left(1 - \tfrac{M_i}{N}\right)\tfrac{N-n}{N-1}$$

Pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}, j \in \{1, \ldots, k\}, i < j$ platí:

$$C(X_i, X_j) = -\tfrac{M_i}{N}\tfrac{M_j}{N}\tfrac{N-n}{N-1}$$

8. Rovnoměrné diskrétní rozložení $Rd(G)$

Náhodný vektor $(X_1, ..., X_n) \sim Rd(G)$ nabývá se stejnou pravděpodobností každé z hodnot v konečné množině $G \subseteq R^n$.

$$\pi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \frac{1}{card(G)} & \text{pro } (x_1, ..., x_n) \in G \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

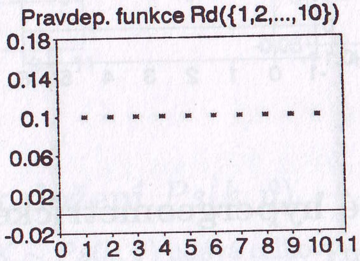
Ve speciálním jednorozměrném případě dostáváme pro

$$G = \{0, 1, ..., \delta - 1\},$$

kde δ je přirozené číslo a tedy $\text{card}(G) = \delta$,

$$\pi(x) = \begin{cases} 1/\delta & \text{pro } x = 0, 1, ..., \delta - 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = (\delta - 1)/2, D(X) = (\delta^2 - 1)/12$$

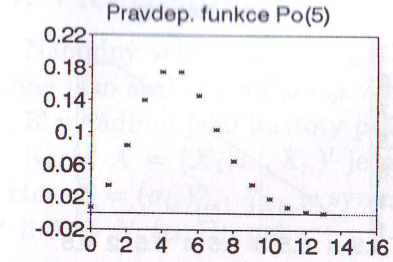


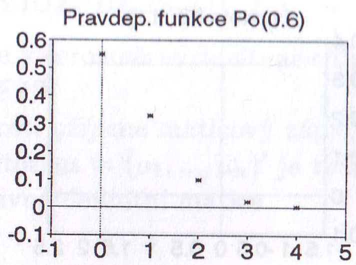
9. Poissonovo rozložení $Po(\lambda)$

Náhodná veličina $X \sim Po(\lambda)$ udává počet událostí, které nastanou v jednotkovém časovém intervalu, případně v jednotkové oblasti, jestliže k událostem dochází náhodně, jednotlivě a vzájemně nezávisle. Parametr $\lambda > 0$ udává střední počet výskytů těchto událostí.

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{pro } x = 0, 1, ... \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$$

Pravděpodobnostní funkce je tabelována v Příloze B.





10. Multinomické rozložení $Mu(n, \vartheta_1, ..., \vartheta_k)$

Náhodný vektor $(X_1, ..., X_k) \sim Mu(n, \vartheta_1, ..., \vartheta_k)$ udává celkový počet výsledků prvního až k-tého druhu, které se nashromáždí v n nezávisle opakovaných pokusech. Předpokládáme, že při každém pokusu nastane výsledek právě jednoho z k možných druhů, a to s pravděpodobností $\vartheta_1 \in (0, 1), ..., \vartheta_k \in (0, 1)$, přičemž platí $\vartheta_1 + ... + \vartheta_k = 1$. Čísla n, k jsou přirozená.

$\pi(x_1, ..., x_k) = \frac{n!}{x_1!...x_k!} \vartheta_1^{x_1} ... \vartheta_k^{x_k}$
pro $x_1 \in \{0, 1, ..., n\}, ..., x_k \in \{0, 1, ..., n\}, x_1 + ... + x_k = n$
$\pi(x_1, ..., x_k) = 0$ jinak

Pro každé $i \in \{1, ..., n\}$ platí:
$E(X_i) = n\vartheta_i, D(X_i) = n\vartheta_i(1 - \vartheta_i)$

Pro každé $i \in \{1, ..., k\}, j \in \{1, ..., k\}, i < j$ platí:
$C(X_i, X_j) = -n\vartheta_i\vartheta_j$

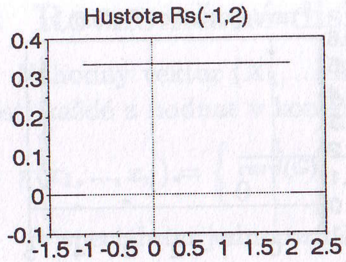
Vybraná rozložení spojitých náhodných veličin

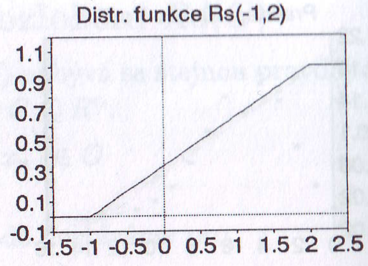
11. Rovnoměrné spojité rozložení $Rs(a, b)$

Náhodná veličina $X \sim Rs(a, b)$, kde $a < b$, má na intervalu (a, b) konstantní hustotu pravděpodobnosti.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a, b) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$





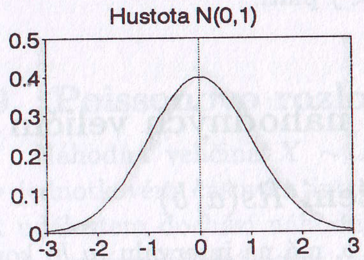
12. Normální rozložení $N(\mu, \sigma^2)$

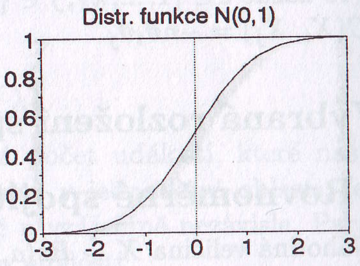
Náhodná veličina $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ má dominantní postavení v počtu pravděpodobnosti. Vyskytuje se v takových situacích, kdy se ke konstantní střední hodnotě $\mu \in (-\infty, \infty)$ přičítá velké množství nezávislých náhodných veličin („náhodných vlivů") kolísajících nepatrně kolem nuly. Vzniklá variabilita je charakterizována směrodatnou odchylkou $\sigma \in (0, \infty)$.

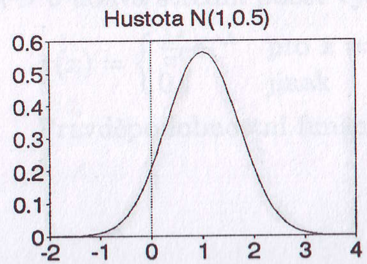
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty)$$

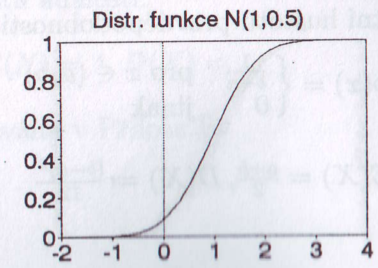
$$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$$

Ve speciálním případě $X \sim N(0,1)$ dostáváme *standardizované normální rozložení*. Jeho distribuční funkce je tabelována v Příloze B, rovněž tak jeho kvantily.









13. Vícerozměrné normální rozložení $N_n(\mu, \Sigma)$

Náhodný vektor $X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ vzniká ve vícerozměrných situacích podobně jako skalární náhodná veličina v bodě 12.

K vyjádření jeho hustoty pravděpodobnosti užijeme maticový zápis.

Nechť $X = (X_1, ..., X_n)'$ je náhodný vektor, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)'$ je reálný vektor, $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i=1,\, j=1}^{n \quad n}$ je symetrická pozitivně definitní matice.
Je-li $X \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, pak

$$\varphi(x) = (\det(2\pi\Sigma))^{-1/2} \cdot \exp\{-\frac{1}{2}(x-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(x-\boldsymbol{\mu}\} \text{ pro } x \in R^n$$

Pro každé $i \in \{1, ..., n\}$ platí

$$E(X_i) = \mu_i, D(X_i) = \sigma_{ii} = \sigma_i^2.$$

Pro každé $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., n\}$ platí

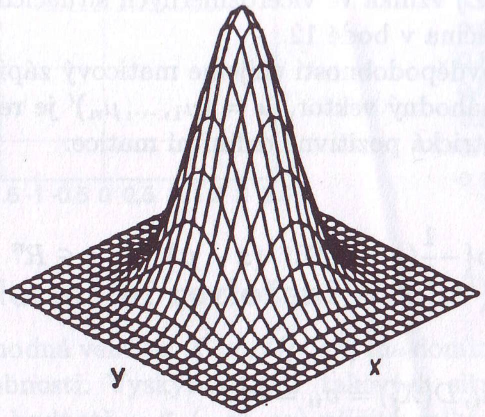
$$C(X_i, X_j) = \sigma_{ij}.$$

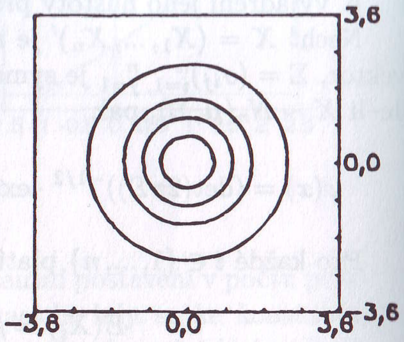
Pro $n = 2$ uvedeme grafy dvou hustot s různými parametry. Zavedeme-li označení $\sigma_{11} = \sigma_1^2, \sigma_{22} = \sigma_2^2, \sigma_{12} = \sigma_{21} = \varrho\sigma_1\sigma_2$, pak hustotu $\varphi(x_1, x_2)$ dostaneme ve tvaru

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{q(x_1, x_2)}{2}\right], \text{ kde}$$

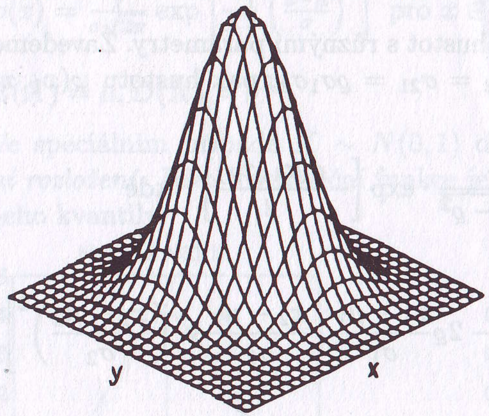
$$q(x_1, x_2) = \frac{1}{1-\varrho^2}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\varrho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

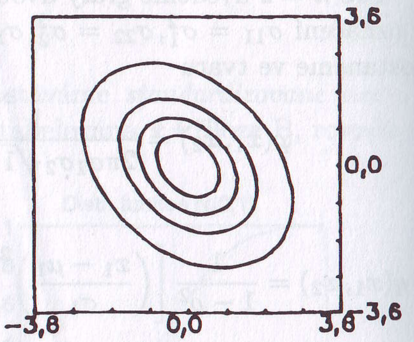
Vrstevnice a graf hustoty standardizovaného dvourozměrného normálního rozložení:





Vrstevnice a graf hustoty dvourozměrného normálního rozložení s parametry $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \varrho = -0,75$:



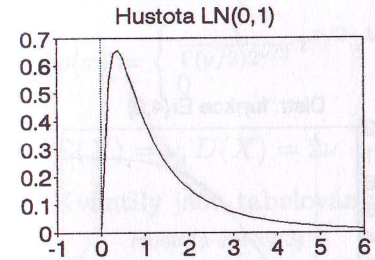


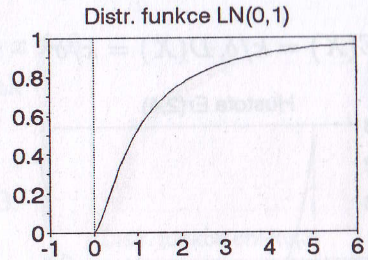
14. Logaritmicko normální rozložení $LN(\lambda, \tau^2)$

Náhodná veličina $X \sim LN(\lambda, \tau^2)$ vzniká v situacích, kdy kladná konstantní hodnota o logaritmu $\lambda \in (-\infty, \infty)$ je násobena velkým množstvím nezávislých náhodných veličin („náhodných vlivů"), kolísajících mírně kolem jedničky. Variabilita jejich logaritmů je charakterizována parametrem $\tau \in (0, \infty)$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \lambda}{\tau}\right)^2\right] & \text{pro } x \in (0, \infty) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = e^{\lambda + \tau^2/2}, D(X) = e^{2\lambda + \tau^2}(e^{\tau^2} - 1)$$



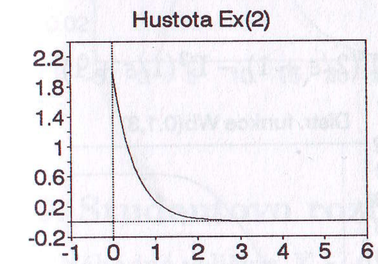


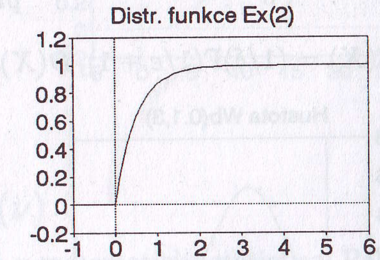
15. Exponenciální rozložení $Ex(\lambda)$

Náhodná veličina $X \sim Ex(\lambda)$, $\lambda > 0$ vyjadřuje náhodnou dobu čekání na nějakou událost, která se může dostavit se stejnou šancí každým okamžikem, bez ohledu na dosud pročekanou dobu. Přitom $1/\lambda$ je střední doba čekání.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = 1/\lambda, D(X) = 1/\lambda^2$$



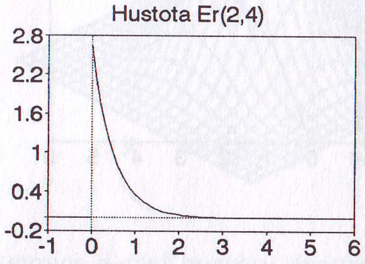


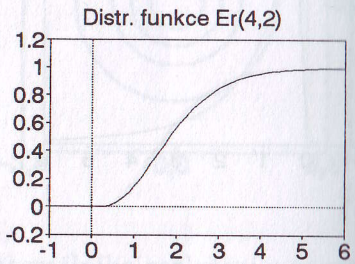
16. Erlangovo rozložení $Er(k, \delta)$

Náhodná veličina $X \sim Er(k, \delta)$, $\delta > 0$ vyjadřuje souhrnnou dobu čekání na k-tý výskyt nějaké události, která se může dostavit se stejnou šancí každým okamžikem, bez ohledu na předešlý průběh čekání. Přitom $1/\delta$ je střední doba čekání od předešlého výskytu této události, k je přirozené číslo.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{(\delta x)^{k-1}}{(k-1)!}\delta e^{-\delta x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases}$$

$$E(X) = k/\delta, D(X) = k/\delta^2$$



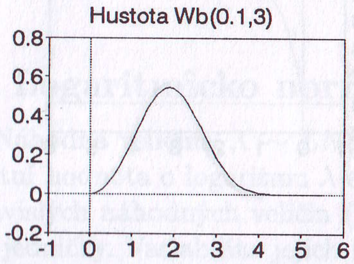


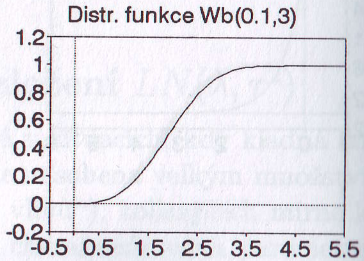
17. Weibullovo rozložení $Wb(\delta, \varepsilon)$

Náhodná veličina $X \sim Wb(\delta, \varepsilon)$ vyjadřuje dobu čekání na nějakou událost, která se každým okamžikem může dostavit se šancí úměrnou mocninné funkci pročekané doby. Přitom čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ se nazývají parametry měřítka a formy.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varepsilon\delta x^{\varepsilon-1}\exp(-\delta x^{\varepsilon}) & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases}$$

$$E(X) = (1/\delta)\Gamma(1/\varepsilon + 1), D(X) = (1/\delta^2)[\Gamma(2/\varepsilon + 1) - \Gamma^2(1/\varepsilon + 1)]$$





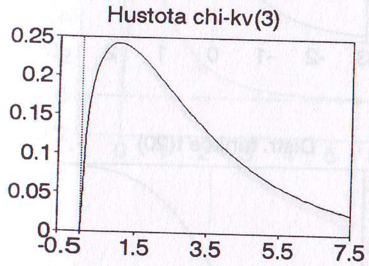
18. Pearsonovo rozložení chí kvadrát $\chi^2(\nu)$

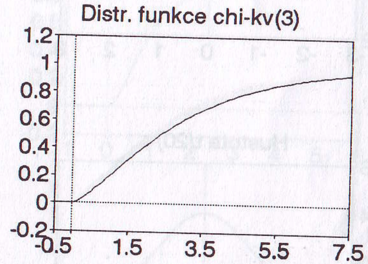
Náhodné veličiny $X \sim \chi^2(\nu)$ se užívá v matematické statistice. Parametr $\nu = 1, 2, \dots$ nazýváme počtem *stupňů volnosti* a nejčastěji vyjadřuje počet nezávislých pozorování zmenšený o počet lineárních podmínek na pozorování kladených.

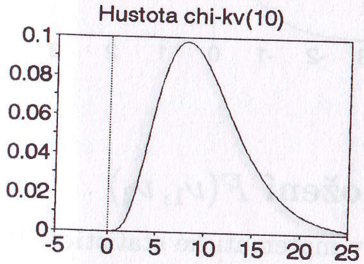
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}}x^{\nu/2-1}e^{-x/2} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

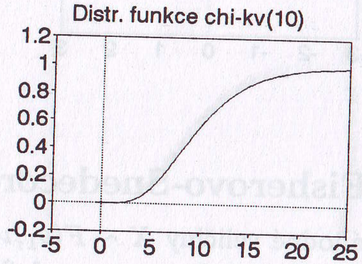
$$E(X) = \nu, D(X) = 2\nu$$

Kvantily jsou tabelovány v Příloze B.









19. Studentovo rozložení $t(\nu)$

Náhodné veličiny $X \sim t(\nu)$ se užívá v matematické statistice. Parametr $\nu = 1, 2, \dots$ zvaný počet stupňů volnosti má stejný význam jako u Pearsonova rozložení.

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\nu\pi}}(1 + x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2} \text{ pro } x \in (-\infty, \infty)$$

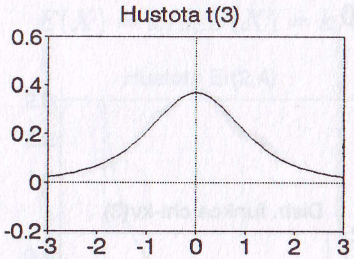
$E(X) = 0$ pro $\nu \ge 2$, pro $\nu = 1$ střední hodnota neexistuje.
$D(X) = \nu/(\nu - 2)$ pro $\nu \ge 3$, pro $\nu = 1, 2$ rozptyl neexistuje.

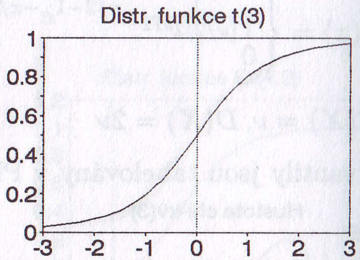
Kvantily jsou tabelovány v Příloze B.

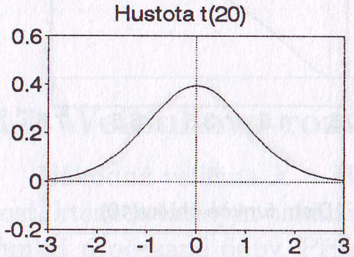
Speciálním případem Studentova rozložení pro $\nu = 1$ je Cauchyovo rozložení:

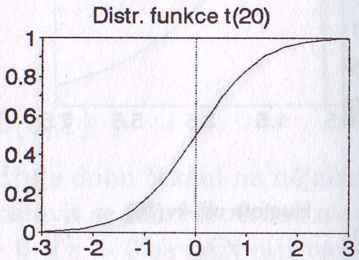
$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ pro $x \in (-\infty, \infty)$

$E(X)$ ani $D(X)$ neexistují.









20. Fisherovo-Snedecorovo rozložení $F(\nu_1, \nu_2)$

Náhodné veličiny $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$ se užívá v matematické statistice. Paramtery $\nu_1 = 1, 2, \ldots$ a $\nu_2 = 1, 2, \ldots$ zvané počet stupňů volnosti čitatele a jmenovatele mají stejný význam jako u Pearsonova rozložení.

$\varphi(x) = \frac{\Gamma[(\nu_1+\nu_2)/2]\nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \cdot \frac{x^{(\nu_1-2)/2}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$ pro $x > 0$,

$\varphi(x) = 0$ jinak

$E(X) = \nu_2/(\nu_2 - 2)$ pro $\nu_2 \geq 3$, $E(X)$ neexistuje pro $\nu_2 = 1, 2$.

$D(X) = 2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)/[\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)]$ pro $\nu_2 \geq 5$,

$D(X)$ neexistuje pro $\nu_2 = 1, 2, 3, 4$.

Kvantily jsou tabelovány v Příloze B.