▲ Mějme následující algoritmus se vstupní a výstupní doménou $\mathbb{R}$:

```
input x
i ← x;
z ← 0;
while ⌊i⌋ ≠ 0 do
     z ← z + x;
     i ← i - 1;
endwhile;
output z
```

Vzhledem ke kterým z následujících vstupních podmínek je algoritmus konvergentní?

a) $\varphi(x) \equiv x \in \mathbb{R}$
b) $\varphi(x) \equiv x \in \mathbb{R}^+$
c) $\varphi(x) \equiv x \in \mathbb{Z}$
d) $\varphi(x) \equiv x \in \mathbb{N}$

Vzhledem ke kterým z uvedených vstupních podmínek a výstupní podmínce

$$\psi(x, z) \equiv z = x^2$$

je algoritmus parciálně korektní?

Najděte vstupní podmínku, pro kterou je algoritmus parciálně korektní vzhledem k libovolné výstupní podmínce.

▲ Napište definici funkce `minimum` pro nalezení nejmenšího prvku v neprázdné konečné posloupnosti čísel. Posloupnost je reprezentovaná neprázdným seznamem. Funkce bude mít jednu bázovou (nerekursivní) větev pro jednoprvkovou posloupnost a jednu rekursivní větev pro aspoň dvouprvkovou posloupnost s prvním prvkem x, druhým prvkem y a zbytkem posloupnosti s.

▲ Dokažte parciální korektnost funkce `minimum` vzhledem ke vstupní podmínce
$\varphi(s) \equiv s$ *je neprázdný seznam celých čísel* a výstupní podmínce
$\psi(s,n) \equiv$ n *leží v* s *a pro všechna* m *ze seznamu* s *platí* $m \geq n$.

▲ Dokažte parciální korektnost algoritmu pro seřazení prvků v dvouprvkovém poli A indexovaném od jedničky vzhledem k podmínkám:
$\varphi(A) \equiv A$ *je dvouprvkové pole celých čísel*
$\psi([x,y],[p,q]) \equiv p \leq q \wedge (p,q)$ *je permutací* (x,y)

```
input A
    if (A[1] > A[2]) then
        z ← A[1];
        A[1] ← A[2];
        A[2] ← z;
    endif
output A
```

▲ Napište definici funkce `power`, která má dva parametry, $z \in \mathbb{R} - \{0\}, n \in \mathbb{N}$, a počítá mocninu z^n.

▲ Formulujte vstupní a výstupní podmínku pro funkci `power`.

▲ Najděte hodnotu, která v cyklu ostře klesá (v každém průchodu aspoň o 1), a zdůvodněte konvergenci vzhledem ke vstupní podmínce.

▲ Najděte v zápisu funkce `power` invariant cyklu a pomocí něho dokažte parciální korektnost.

Jiná varianta funkce `power`:

```
power z 0  =  1
power z n  =  if  odd n  then  z * t  else  t
              where  t = power (z*z) (n `div` 2)
```

▲ Dokažte konvergenci funkce `power` vzhledem ke vstupní podmínce $\varphi((z,n)) \equiv z \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge n \in \mathbb{N}$. Která hodnota v definici ostře klesá? Proč nemůže být záporná?

▲ Funkce `soucet` vypočte pro danou posloupnost $A_1, A_2, \ldots$ celých čísel součet $A_1 + \cdots + A_k$, v němž jsou všechny sčítance nenulové a $A_{k+1} = 0$ je prvním výskytem nuly v posloupnosti.

```
function soucet (A:posl): integer;
 var k: integer; s: integer;
 begin k := 1;  s := 0;
       while A[k] ≠ 0      /* inv */
        do begin s := s + A[k];
                 k := k + 1
           end;
       return s
 end
```

Určete invariant cyklu ve vyznačeném místě tak, aby s jeho pomocí bylo možno ze vstupní podmínky

$$\varphi(A) \ \equiv \ \forall i.\, A_i \in \mathbb{Z} \ \wedge \ \exists k \geq 1.\, A_k = 0$$

odvodit výstupní podmínku

$$\psi(A, s) \ \equiv \ \exists k > 0. \left(A_k = 0 \ \wedge \ (\forall j.\, 1 \leq j < k \Rightarrow A_j \neq 0) \ \wedge \ s = \sum_{i=1}^{k} A_i \right)$$

☐ Následující algoritmus seřadí číselnou posloupnost $a = (a_1, \ldots, a_n)$ uloženou v poli A vzestupně. Tedy na konci výpočtu bude v poli A posloupnost $a' = (a'_1, \ldots, a'_n)$, která je permutací posloupnosti a a platí $a'_1 \leq \cdots \leq a'_n$

```
for i ← [2 .. n] do
begin
   x := A_i;   j := i − 1;
   while (j > 0) && (A_j > x) do
   begin
       A_{j+1} := A_j;
       j := j − 1
   end;
   A_{j+1} := x
end
```

Formulujte vstupní a výstupní podmínky a nalezněte invarianty pro vnější a vnitřní cyklus.

☐ Nenulový reálný polynom je zadán neprázdnou posloupností koeficientů $p = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Napište funkci h se dvěma parametry, p, x, která vypočte funkční hodnotu polynomu p v bodě x.

☐ Stanovte vstupní a výstupní podmínky a dokažte konvergenci a správnost funkce h.