# CLP($FD$) - prohledávání

# Vestavěné predikáty pro labeling

- Instanciace proměnné `Variable` hodnotami v její doméně

  `indomain( Variable )`

  hodnoty jsou instanciovány při backtrackingu ve vzrůstajícím pořadí

```
?- X in 4..5, indomain(X).
   X = 4 ? ;
   X = 5 ?

labeling( [] ).
labeling( [Var|Rest]  ) :-     % výběr nejlevější proměnné k instanciaci
     indomain( Var ),          % výběr hodnot ve vzrůstajícím pořadí
     labeling( Rest ).
```

- `labeling( Options, Variables )`

```
?- A in 0..2, B in 0..2, B#< A, labeling([], [A,B]).
```



# Uspořádání hodnot a proměnných

- Při prohledávání je rozhodující **uspořádání hodnot a proměnných**
- Určují je **heuristiky výběru hodnot a výběru proměnných**

```
labeling( [] ).
labeling( Variables  ) :-
     select_variable(Variables,Var,Rest),
     select_value(Var,Value),
     ( Var #= Value,
       labeling( Rest )
     ;
       Var #\= Value ,          % nemusí dojít k instanciaci Var
       labeling( Variables )   % proto pokračujeme se všemi proměnnými včetně Var
     ).
```

- **Statické uspořádání:** určeno už před prohledáváním
- **Dynamické uspořádání:** počítá se během prohledávání



# Výběr hodnoty

- Obecný princip výběru hodnoty: **první úspěch *(succeed first)***
  - volíme pořadí tak, abychom výběr nemuseli opakovat
  - `?- domain([A,B,C],1,2), A#=B+C.` optimální výběr A=2,B=1,C=1 je bez backtrackingu
- Parametry `labeling/2` ovlivňující výběr hodnoty př. `labeling([down], Vars)`
  - up: doména procházena ve vzrůstajícím pořadí (default)
  - down: doména procházena v klesajícím pořadí
- Parametry `labeling/2` řídící, jak je výběr hodnoty realizován
  - `step`: volba mezi `X #= M, X #\= M` (default)
    - viz dřívější příklad u "Uspořádání hodnot a proměnných"
  - `enum`: vícenásobná volba mezi všemi hodnotami v doméně
    - podobně jako při `indomain/1`
  - `bisect`: volba mezi `X #=< Mid, X #> Mid`
    - v jednom kroku labelingu nedochází nutně k instanciaci proměnné

# Výběr proměnné

- Obecný princip výběru proměnné: ***first-fail***
  - výběr proměnné, pro kterou je nejobtížnější nalézt správnou hodnotu
    pozdější výběr hodnoty pro tuto proměnnou by snadněji vedl k failu
  - výbereme proměnnou **s nejmenší doménou**
  - `?- domain([A,B,C],1,3), A#<3, A#=B+C.` nejlépe je začít s výběrem A
- Parametry `labeling/2` ovlivňující výběr proměnné
  - `leftmost`: nejlevější (default)
  - `ff`: s (1) nejmenší velikostí domény `fd_size(Var,Size)`
    (2) (pokud s nejmenší velikostí domény více, tak) nejlevější z nich
  - `ffc`: s (1) nejmenší velikostí domény
    (2) největším množstvím omezením „čekajících" na proměnné `fd_degree(Var,Size)`
    (3) nejlevější z nich
  - `min/max`: s (1) nejmenší/největší hodnotou v doméně proměnné
    (2) nejlevnější z nich `fd_min(Var,Min)/fd_max(Var,Max)`



# Hledání optimálního řešení (předpokládejme minimalizaci)

- Parametry `labeling/2` pro optimalizaci: `minimize(F)/maximize(F)`
  - `Cena #= A+B+C, labeling([minimize(Cena)], [A,B,C])`
- **Metoda větví a mezí *(branch&bound)*** `branch_and_bound(Vars, Cost)`
  - uvažujeme nejhorší možnou cenu řešení $UB$ (např. cena už nalezeného řešení)
  - počítáme dolní odhad $LB$ ceny částečného řešení
    $LB$ je tedy nejlepší možná cena pro rozšíření tohoto řešení
  - procházíme strom a vyžadujeme, aby prozkoumávaná větev měla cenu $LB < UB$
    pokud je $LB \geq UB$, tak víme, že v této větvi není lepší řešení a odřízneme ji
- Iniciálně je Bound je předem známá nejhorší cena (např. krajní hodnota v doméně)

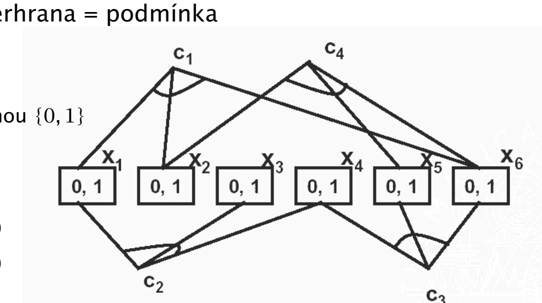
```
branch_and_bound( Bound, Vars, Cost ) :-          % triviální implementace
      Cost #< Bound,
      findall( Vars-Cost, (labeling( Vars ), ! ), [ Solution-FoundCost ]), !,
      asserta( solution( Solution, FoundCost ) ),
      branch_and_bound( FoundCost, Vars, Cost ).
branch_and_bound( _, Vars, Cost ) :- solution( Vars, Cost ), !.
```



# Algoritmy pro řešení problému splňování podmínek (CSP)

# Grafová reprezentace CSP

- **Reprezentace podmínek**
  - intenzionální (matematická/logická formule)
  - extenzionální (výčet k-tic kompatibilních hodnot, 0-1 matice)
- **Graf:** vrcholy, hrany (hrana spojuje dva vrcholy)
- **Hypergraf:** vrcholy, hrany (hrana spojuje množinu vrcholů)
- Reprezentace CSP pomocí **hypergrafu podmínek**
  - vrchol = proměnná, hyperhrana = podmínka
- Příklad
  - proměnné $x_1, \ldots, x_6$ s doménou $\{0, 1\}$
  - omezení $c_1 : x_1 + x_2 + x_6 = 1$
    $c_2 : x_1 - x_3 + x_4 = 1$
    $c_3 : x_4 + x_5 - x_6 > 0$
    $c_4 : x_2 + x_5 - x_6 = 0$



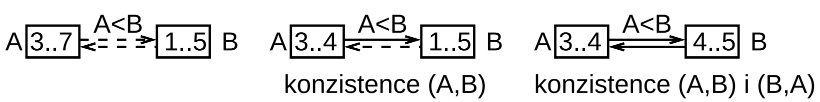
# Binární CSP

- **Binární CSP**
  - CSP, ve kterém jsou pouze binární podmínky
  - unární podmínky zakódovány do domény proměnné
- **Graf podmínek** pro binární CSP
  - není nutné uvažovat hypergraf, stačí graf (podmínka spojuje pouze dva vrcholy)
- **Každý CSP lze transformovat na "korespondující" binární CSP**
- Výhody a nevýhody binarizace
  - získáváme unifikovaný tvar CSP problému, řada algoritmů navržena pro binární CSP
  - bohužel ale značné zvětšení velikosti problému
- Nebinární podmínky
  - složitější propagační algoritmy
  - lze využít jejich sémantiky pro lepší propagaci
    - příklad: `all_different` vs. množina binárních nerovností



# Vrcholová a hranová konzistence

- **Vrcholová konzistence *(node consistency)* NC**
  - každá hodnota z aktuální domény $V_i$ proměnné splňuje všechny unární podmínky s proměnnou $V_i$
- **Hranová konzistence *(arc consistency)* AC** pro **binární CSP**
  - **hrana** $(V_i, V_j)$ **je hranově konzistentní**, právě když pro každou hodnotu $x$ z aktuální domény $D_i$ existuje hodnota $y$ tak, že ohodnocení $[V_i = x, V_j = y]$ splňuje všechny binární podmínky nad $V_i, V_j$.
  - hranová konzistence je **směrová**
    - konzistence hrany $(V_i, V_j)$ nezaručuje konzistenci hrany $(V_j, V_i)$




  - **CSP** je **hranově konzistentní**, právě když jsou všechny jeho hrany (v obou směrech) hranově konzistentní



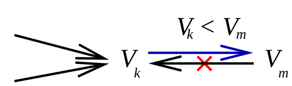
# Algoritmus revize hrany

- Jak udělat hranu $(V_i, V_j)$ hranově konzistentní?
- Z domény $D_i$ vyřadím takové hodnoty $x$, které nejsou konzistentní s aktuální doménou $D_j$ (pro $x$ neexistuje žádá hodnoty $y$ v $D_j$ tak, aby ohodnocení $V_i = x$ a $V_j = y$ splňovalo všechny binární podmínky mezi $V_i$ a $V_j$)
- 
```
procedure revise((i,j))
Deleted := false
for ∀x in D_i do
    if neexistuje y ∈ D_j takové, že (x,y) je konzistentní
    then D_i := D_i − {x}
         Deleted := true
    end if
return Deleted
end revise
```
- `domain([`$V_1$`,`$V_2$`],2,4)`, $V_1$`#<` $V_2$ `revise((1,2))` smaže 4 z $D_1$,$D_2$ se nezmění



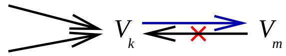
# Dosažení hranové konzistence problému

- Jak udělat CSP hranově konzistentní?
  - revize je potřeba opakovat, dokud se mění doména nějaké proměnné
  - efektivnější: opakování revizí můžeme dělat pomocí **fronty**
    - přidáváme do ní hrany, jejichž konzistence mohla být narušena zmenšením domény
- Jaké hrany přesně revidovat po zmenšení domény?
  - ty, jejichž konzistence může být zmenšením domény proměnné narušena jsou to hrany $(i, k)$, které vedou do proměnné $V_k$ se zmenšenou doménou



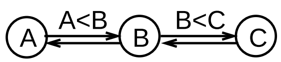

  - hranu $(m, k)$ vedoucí z proměnné $V_m$, která zmenšení domény způsobila, není třeba revidovat (změna se jí nedotkne)
  - příklad: $V_k < V_m$, $(V_k, V_m)$: (3..7,1..5) $\xrightarrow{(m,k)}$ (3..7,4..5) $\xrightarrow{(k,m)}$ (3..4,4..5) $\cancel{\xrightarrow{(m,k)}}$

# Algoritmus AC-3




```
procedure AC-3(G)
Q := {(i,j) | (i,j) ∈ hrany(G), i ≠ j}     % seznam hran pro revizi
while Q non empty do
     vyber a smaž (k,m) z Q
     if revise((k,m)) then                        % pridani pouze hran, ktere
        Q := Q ∪ {(i,k)  ∈ hrany(G), i ≠ k, i ≠ m}    % dosud nejsou ve fronte
end while
end AC-3
```

- Příklad:




A<B, B<C: $(\underline{3..7},1..5,1..5) \xrightarrow{AB} (3..4,\underline{1..5},1..5) \xrightarrow{BA}$
$(3..4,\underline{4..5},1..5) \xrightarrow{BC} (3..4,4,\underline{1..5}) \xrightarrow{CB} (\underline{3..4},4,5)$
$\xrightarrow{AB} (3,4,5)$

- Technika AC-3 je dnes asi nejpoužívánější, ale stále není optimální
- Jaké budou domény A,B,C po AC-3 pro: `domain([A,B,C],1,10), A #= B + 1, C #< B`



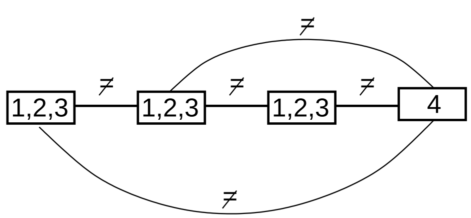
# Je hranová konzistence dostatečná?

- Použitím AC odstraníme mnoho nekompatibilních hodnot
  - Dostaneme potom řešení problému? NE
  - Víme alespoň zda řešení existuje? NE
- `domain([X,Y,Z],1,2), X#\= Y, Y#\= Z, Z#\= X`
  - hranově konzistentní
  - nemá žádné řešení
- Jaký je tedy význam AC?
  - někdy dá řešení přímo
    - nějaká doména se vyprázdní ⇒ řešení neexistuje
    - všechny domény jsou jednoprvkové ⇒ máme řešení
  - v obecném případě se alespoň zmenší prohledávaný prostor



# k-konzistence

- Mají NC a AC něco společného?
  - NC: konzistence jedné proměnné
  - AC: konzistence dvou proměnných
  - ... můžeme pokračovat
- CSP je **k-konzistentní** právě tehdy, když můžeme libovolné konzistentní ohodnocení (k-1) různých proměnných rozšířit do libovolné k-té proměnné



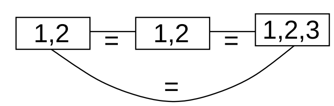

4-konzistentní graf

- Pro obecné CSP, tedy i pro nebinární podmínky



# Silná k-konzistence

3-konzistentní graf



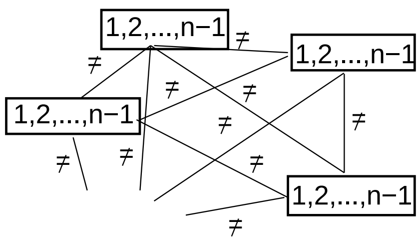

není 2-konzistentní

$(1,1)$ lze rozšířit na $(1,1,1)$ — $(3)$ nelze rozšířit
$(2,2)$ lze rozšířit na $(2,2,2)$
$(1,3)$ ani $(2,3)$ nejsou konzistentní dvojice (nerozšiřujeme je)

- CSP je **silně k-konzistentní** právě tehdy, když je j-konzistentní pro každé j≤k
- Silná k-konzistence ⇒ k-konzistence
- Silná k-konzistence ⇒ j-konzistence $\forall j \leq k$
- k-konzistence $\not\Rightarrow$ silná k-konzistence
- NC = silná 1-konzistence = 1-konzistence
- AC = (silná) 2-konzistence

# Konzistence pro nalezení řešení

- Máme-li graf s n vrcholy, jak silnou konzistenci potřebujeme, abychom přímo našli řešení?
  - silná n-konzistence je nutná pro graf s n vrcholy
    - n-konzistence nestačí (viz předchozí příklad)
    - silná k-konzistence pro k<n také nestačí




graf s n vrcholy
domény 1..(n-1)

silně k-konzistentní pro každé k<n
přesto nemá řešení



# Řešení nebinárních podmínek

- k-konzistence má exponenciální složitost, v reálu se nepoužívá
- S n-árními podmínkami se pracuje přímo
- Podmínka je **obecně hranově konzistentní (GAC)**, právě když pro každou proměnnou $V_i$ z této podmínky a každou hodnou $x \in D_i$ existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že podmínka platí
  - `A + B = C, A in 1..3, B in 2..4, C in 3..7` je obecně hranově konzistentní
- Využívá se sémantika podmínek
  - speciální typy konzistence pro globální omezení
    - viz `all_distinct`
  - konzistence mezí
    - propagace pouze při změně nejmenší a největší hodnoty v doméně proměnné
- Pro různé podmínky lze použít různý druh konzistence
  - A#<B: hranová konzistence, konzistence mezí



# Konzistenční algoritmus pro nebinární podmínky

- Algoritmus s **frontou proměnných** (někdy též nazýván AC-8)
  - opakovaně se provádí revize podmínek, dokud se mění domény

```
procedure Nonbinary-AC-3-with-Variables(Q)
while Q non empty do
      vyber a smaž V_j ∈Q
      for ∀C takové, že V_j ∈ scope(C) do
          W := revise(V_j, C)
             // W je množina proměnných jejichž, doména se změnila
          if ∃ V_i ∈ W taková, že D_i = ∅ then return fail
          Q := Q ∪ {W}
end  Non-binary-consistency
```

  - **rozsah omezení** $scope(C)$: množina proměnných, na nichž je $C$ definováno
- Implementace
  - u každé proměnné je seznam **vybraných podmínek** pro propagaci
  - REVISE procedury pro tyto podmínky definuje uživatel v závislosti na typu podmínky



# Konzistence mezí

- ***Bounds consistency* BC**: slabší než obecná hranová konzistence
  - podmínka má **konzistentní meze (BC)**, právě když pro každou proměnnou $V_j$ z této podmínky a každou hodnou $x \in D_j$ existuje ohodnocení zbylých proměnných v podmínce tak, že je podmínka splněna a pro vybrané ohodnocení $y_i$ proměnné $V_i$ platí $\min(D_i) \le y_i \le \max(D_i)$
  - stačí propagace pouze při **změně minimální nebo maximální hodnoty (při změně mezí)** v doméně proměnné
- **Konzistence mezí pro nerovnice**
  - `A #> B => min(A) = min(B)+1, max(B) = max(A)-1`
  - příklad: `A in 4..10, B in 6..18, A #> B`
    `min(A) = 6+1 ⇒ A in 7..10`
    `max(B) = 10-1 ⇒ B in 6..9`
  - podobně: `A #< B`, `A #>= B`, `A #=< B`

# Konzistence mezí a aritmetická omezení

- `A #= B + C => min(A) = min(B)+min(C), max(A) = max(B)+max(C)`
  `min(B) = min(A)-max(C), max(B) = max(A)-min(C)`
  `min(C) = min(A)-max(B), max(C) = max(A)-min(B)`
  - změna `min(A)` vyvolá pouze změnu `min(B)` a `min(C)`
  - změna `max(A)` vyvolá pouze změnu `max(B)` a `max(C), ...`
- Příklad: `A in 1..10, B in 1..10, A #= B + 2, A #> 5, A #\= 8`

  `A #= B + 2` ⇒ `min(A)=1+2, max(A)=10+2` ⇒ `A in 3..10`

  ⇒ `min(B)=1-2, max(B)=10-2` ⇒ `B in 1..8`

  `A #> 5` ⇒ `min(A)=6` ⇒ `A in 6..10`

  ⇒ `min(B)=6-2` ⇒ `B in 4..8` (nové vyvolání `A #= B + 2`)

  `A #\= 8` ⇒ `A in (6..7) \/ (9..10)` (meze stejné, k propagaci `A #= B + 2` nedojde)
- Vyzkoušejte si: `A #= B - C, A #>= B + C`



# Globální podmínky

- Propagace je lokální
  - pracuje se s jednotlivými podmínkami
  - interakce mezi podmínkami je pouze přes domény proměnných
- Jak dosáhnout více, když je silnější propagace drahá?
- Seskupíme několik podmínek do jedné tzv. **globální podmínky**
- Propagaci přes globální podmínku řešíme
  speciálním algoritmem navrženým pro danou podmínku
- Příklady:
  - `all_different` omezení: hodnoty všech proměnných různé
  - `serialized` omezení:
    rozvržení úloh zadaných startovním časem a dobou trvání tak, aby se nepřekrývaly



# Propagace pro `all_distinct`

- **U = {X2, X4, X5}, dom(U) = {2, 3, 4}**:

  `{2,3,4}` nelze pro `X1, X3, X6`

  `X1 in 5..6, X3 = 5, X6 in {1} \/ (5..6)`
- **Konzistence:** $\forall \{X_1,\dots,X_k\} \subset V : card\{D_1 \cup \dots \cup D_k\} \geq k$
  stačí hledat **Hallův interval** $I$: velikost intervalu $I$ je rovna
  počtu proměnných, jejichž doména je v $I$
- **Inferenční pravidlo**
  - $U = \{X_1,\dots,X_k\}$, $dom(U) = \{D_1 \cup \dots \cup D_k\}$
  - $card(U) = card(dom(U)) \Rightarrow \forall v \in dom(U), \forall X \in (V - U), X \neq v$
  - hodnoty v Hallově intervalu jsou pro ostatní proměnné nedostupné
- **Složitost**: $O(2^n)$ – hledání všech podmnožin množiny $n$ proměnných (naivní)
  $O(n \log n)$ – kontrola hraničních bodů Hallových intervalů (1998)

| učitel | min | max |
|---|---|---|
| Jan | 3 | 6 |
| Petr | **3** | **4** |
| Anna | 2 | 5 |
| Ota | **2** | **4** |
| Eva | **3** | **4** |
| Marie | 1 | 6 |