Logické programování
s omezujícími podmínkami

Constraint Logic Programming: CLP

CP: elektronické materiály

- Dechter, R. **Constraint Processing.** Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
  - `http://www.ics.uci.edu/~dechter/books/`
- Barták R. **Přednáška Omezující podmínky na MFF UK, Praha**.
  - `http://kti.ms.mff.cuni.cz/~bartak/podminky/prednaska.html`
- **SICStus Prolog User's Manual**, 2007. Kapitola o CLP(FD).
  - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/sicstus/doc/html/`
- **Příklady v distribuci SICStus Prologu**: cca 45 příkladů, zdrojový kód
  - `lib/sicstus-*/library/clpfd/examples/`

Probírané oblasti

- Obsah
  - úvod: od LP k CLP
  - základy programování
  - základní algoritmy pro řešení problémů s omezujícími podmínkami

Probírané oblasti

- Obsah
  - úvod: od LP k CLP
  - základy programování
  - základní algoritmy pro řešení problémů s omezujícími podmínkami
- Příbuzné přednášky na FI
  - PA163 Programování s omezujícími podmínkami
    - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/cp`
  - PA167 Rozvrhování
    - `http://www.fi.muni.cz/~hanka/rozvrhovani`
    - zahrnuty CP techniky pro řešení rozvrhovacích problémů

Historie a současnost

- 1963 interaktivní grafika (Sutherland: Sketchpad)
- Polovina 80. let: logické programování omezujícími podmínkami
- Od 1990: komerční využití
- Už v roce 1996: výnos řádově stovky milionů dolarů
- Aplikace – příklady
  - Lufthansa: krátkodobé personální plánování
    - reakce na změny při dopravě (zpoždění letadla, . . .)
    - minimalizace změny v rozvrhu, minimalizace ceny
  - Nokia: automatická konfigurace sw pro mobilní telefony
  - Renault: krátkodobé plánování výroby, funkční od roku 1995

Omezení (*constraint*)

- Dána
  - množina **(doménových) proměnných** $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$
  - **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_k\}$

Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \ldots \times D_k$

- omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně

Omezení (*constraint*)

- Dána
  - množina **(doménových) proměnných** $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$
  - **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_k\}$

  Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \ldots \times D_k$
  - omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně
- Příklad:
  - proměnné: A,B
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B
  - omezení: A$\neq$B nebo (A,B) $\in$ {(0,1),(0,2),(1,2)}

Omezení (*constraint*)

- Dána
  - množina **(doménových) proměnných** $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$
  - **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_k\}$

  Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \ldots \times D_k$
  - omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně
- Příklad:
  - proměnné: A,B
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B
  - omezení: A$\neq$B nebo (A,B) $\in$ {(0,1),(0,2),(1,2)}
- Omezení c definováno na $y_1, \ldots y_k$ je **splněno**,
  pokud pro $d_1 \in D_1, \ldots d_k \in D_k$ platí $(d_1, \ldots d_k) \in c$

Omezení (*constraint*)

- Dána
  - množina **(doménových) proměnných** $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$
  - **konečná** množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_k\}$

  Omezení c na Y je podmnožina $D_1 \times \ldots \times D_k$
  - omezuje hodnoty, kterých mohou proměnné nabývat současně
- Příklad:
  - proměnné: A,B
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B
  - omezení: A≠B nebo (A,B) ∈ {(0,1),(0,2),(1,2)}
- Omezení c definováno na $y_1, \ldots y_k$ je **splněno**,
  pokud pro $d_1 \in D_1, \ldots d_k \in D_k$ platí $(d_1, \ldots d_k) \in c$
  - příklad (pokračování): omezení splněno pro $(0,1), (0,2), (1,2)$, není splněno pro $(1,1)$

Problém splňování podmínek (CSP)

- Dána
  - konečná množina **proměnných** $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$
  - konečná množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_n\}$
  - konečná množina **omezení** $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$
    - omezení je definováno na podmnožině X

Problém splňování podmínek je trojice (X, D, C)

(constraint satisfaction problem)

Problém splňování podmínek (CSP)

- Dána
  - konečná množina **proměnných** $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$
  - konečná množina hodnot (**doména**) $D = \{D_1, \ldots, D_n\}$
  - konečná množina **omezení** $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$
    - omezení je definováno na podmnožině X

  Problém splňování podmínek je trojice (X, D, C)

  (constraint satisfaction problem)

- Příklad:
  - proměnné: A,B,C
  - domény: {0,1} pro A {1,2} pro B {0,2} pro C
  - omezení: A≠B, B≠C

Řešení CSP

- **Částečné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_k), k < n$
  - některé proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Úplné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_n)$
  - všechny proměnné mají přiřazenu hodnotu

Řešení CSP

- **Částečné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_k), k < n$
  - některé proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Úplné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_n)$
  - všechny proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Řešení CSP**
  - úplné ohodnocení proměnných, které splňuje všechna omezení
  - $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ je **řešení** (X, D, C)
    - pro každé $c_i \in C$ na $x_{i_1}, \ldots x_{i_k}$ platí $(d_{i_1}, \ldots d_{i_k}) \in c_i$

Řešení CSP

- **Částečné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_k), k < n$
  - některé proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Úplné ohodnocení proměnných** $(d_1, \ldots, d_n)$
  - všechny proměnné mají přiřazenu hodnotu
- **Řešení CSP**
  - úplné ohodnocení proměnných, které splňuje všechna omezení
  - $(d_1, \ldots, d_n) \in D_1 \times \ldots \times D_n$ je **řešení** (X, D, C)
    - pro každé $c_i \in C$ na $x_{i_1}, \ldots x_{i_k}$ platí $(d_{i_1}, \ldots d_{i_k}) \in c_i$
- Hledáme: jedno nebo

  všechna řešení nebo

  optimální řešení (vzhledem k objektivní funkci)

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** `Jan, Petr, ...`
- **domény:** $\{3,4,5,6\},\{3,4\},\ldots$
- **omezení:** `all_distinct([Jan,Petr,...])`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** `Jan, Petr, ...`
- **domény:** $\{3,4,5,6\},\{3,4\},\ldots$
- **omezení:** `all_distinct([Jan,Petr,...])`
- **částečné ohodnocení:** `Jan=6, Anna=5, Marie=1`
- **úplné ohodnocení:**

  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4,` Marie=6

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** `Jan, Petr, ...`
- **domény:** $\{3,4,5,6\},\{3,4\},\ldots$
- **omezení:** `all_distinct([Jan,Petr,...])`
- **částečné ohodnocení:** `Jan=6, Anna=5, Marie=1`
- **úplné ohodnocení:**

  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4,` **Marie=6**
- **řešení CSP:**

  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, Marie=1`
- **všechna řešení:** ještě `Jan=6,` **Petr=4**`, Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

- **proměnné:** `Jan, Petr, ...`
- **domény:** $\{3,4,5,6\},\{3,4\},\ldots$
- **omezení:** `all_distinct([Jan,Petr,...])`
- **částečné ohodnocení:** `Jan=6, Anna=5, Marie=1`
- **úplné ohodnocení:**

  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4,` **Marie=6**
- **řešení CSP:**

  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, Marie=1`
- **všechna řešení:** ještě `Jan=6,` **Petr=4**`, Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`
- optimálizace: ženy učí co nejdříve

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Příklad: jednoduchý školní rozvrh

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

- **proměnné:** `Jan, Petr, ...`
- **domény:** $\{3,4,5,6\},\{3,4\},\ldots$
- **omezení:** `all_distinct([Jan,Petr,...])`
- **částečné ohodnocení:** `Jan=6, Anna=5, Marie=1`
- **úplné ohodnocení:**

  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4,` **Marie=6**
- **řešení CSP:**

  `Jan=6, Petr=3, Anna=5, Ota=2, Eva=4, Marie=1`
- **všechna řešení:** ještě `Jan=6,` **Petr=4**, `Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`
- optimálizace: ženy učí co nejdříve

  `Anna+Eva+Marie #= Cena` minimalizace hodnoty proměnné Cena

  optimální řešení: `Jan=6,` **Petr=4,** `Anna=5, Ota=2,` **Eva=3,** `Marie=1`

CLP(FD) program

- Základní struktura **CLP programu**

  1. definice proměnných a jejich domén
  2. definice omezení
  3. hledání řešení

CLP(FD) program

- Základní struktura **CLP programu**
  1. definice proměnných a jejich domén
  2. definice omezení
  3. hledání řešení
- (1) a (2) deklarativní část
  - **modelování** problému
  - vyjádření problému splňování podmínek

CLP(FD) program

- Základní struktura **CLP programu**
  1. definice proměnných a jejich domén
  2. definice omezení
  3. hledání řešení
- (1) a (2) deklarativní část
  - **modelování** problému
  - vyjádření problému splňování podmínek
- (3) řídicí část
  - **prohledávání** stavového prostoru řešení
  - procedura pro hledání řešení (enumeraci) se nazývá **labeling**
  - umožní nalézt jedno, všechna nebo optimální řešení

Kód CLP(FD) programu

% základní struktura CLP programu

```
solve( Variables ) :-
    declare_variables( Variables ),          domain([Jan],3,6], ...
```

Kód CLP(FD) programu

```
% základní struktura CLP programu
solve( Variables ) :-
     declare_variables( Variables ),          domain([Jan],3,6], ...
     post_constraints( Variables ),           all_distinct([Jan,Petr,...])
```

Kód CLP(FD) programu

```
% základní struktura CLP programu
solve( Variables ) :-
     declare_variables( Variables ),          domain([Jan],3,6], ...
     post_constraints( Variables ),           all_distinct([Jan,Petr,...])
     labeling( Variables ).
```

Kód CLP(FD) programu

% základní struktura CLP programu

```
solve( Variables ) :-
     declare_variables( Variables ),          domain([Jan],3,6], ...
     post_constraints( Variables ),           all_distinct([Jan,Petr,...])
     labeling( Variables ).
```

% triviální labeling

```
labeling( [] ).
labeling( [Var|Rest]  ) :-
     fd_min(Var,Min),                 % výběr nejmenší hodnoty z domény
     ( Var#=Min, labeling( Rest )
```

Kód CLP(FD) programu

```
% základní struktura CLP programu
solve( Variables ) :-
     declare_variables( Variables ),        domain([Jan],3,6], ...
     post_constraints( Variables ),         all_distinct([Jan,Petr,...])
     labeling( Variables ).

% triviální labeling
labeling( [] ).
labeling( [Var|Rest]  ) :-
     fd_min(Var,Min),                       % výběr nejmenší hodnoty z domény
     ( Var#=Min, labeling( Rest )
     ;
       Var#>Min , labeling( [Var|Rest] )
     ).
```

Příklad: algebrogram

- Přiřaďte cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
  - SEND + MORE = MONEY
  - různá písmena mají přiřazena různé cifry
  - S a M nejsou 0

Příklad: algebrogram

- Přiřad'te cifry 0, ... 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
  - SEND + MORE = MONEY
  - různá písmena mají přiřazena různé cifry
  - S a M nejsou 0
- `domain([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), domain([S,M],1,9)`

Příklad: algebrogram

- Přiřaďte cifry 0, . . . 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
  - SEND + MORE = MONEY
  - různá písmena mají přiřazena různé cifry
  - S a M nejsou 0
- `domain([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), domain([S,M],1,9)`
-

```
                 1000*S + 100*E + 10*N + D
+                1000*M + 100*O + 10*R + E
#=   10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y
```

Příklad: algebrogram

- Přiřaďte cifry 0, ... 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
  - SEND + MORE = MONEY
  - různá písmena mají přiřazena různé cifry
  - S a M nejsou 0
- `domain([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), domain([S,M],1,9)`
-
```
                1000*S + 100*E + 10*N + D
+               1000*M + 100*O + 10*R + E
#=    10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y
```
- `all_distinct( [S,E,N,D,M,O,R,Y] )`

Příklad: algebrogram

- Přiřaďte cifry 0, ... 9 písmenům S, E, N, D, M, O, R, Y tak, aby platilo:
  - SEND + MORE = MONEY
  - různá písmena mají přiřazena různé cifry
  - S a M nejsou 0
- `domain([E,N,D,O,R,Y], 0, 9), domain([S,M],1,9)`
-

```
                1000*S + 100*E + 10*N + D
+               1000*M + 100*O + 10*R + E
#=   10000*M + 1000*O + 100*N + 10*E + Y
```

- `all_distinct( [S,E,N,D,M,O,R,Y] )`
- `labeling( [S,E,N,D,M,O,R,Y] )`

Od LP k CLP I.

- CLP: rozšíření logického programování o omezující podmínky
- CLP systémy se liší podle typu domény
  - **CLP($\mathcal{A}$)** generický jazyk
  - **CLP(FD)** domény proměnných jsou konečné *(Finite Domains)*
  - **CLP($\mathbb{R}$)** doménou proměnných je množina reálných čísel

Od LP k CLP I.

- CLP: rozšíření logického programování o omezující podmínky
- CLP systémy se liší podle typu domény
  - **CLP($\mathcal{A}$)** generický jazyk
  - **CLP(FD)** domény proměnných jsou konečné *(Finite Domains)*
  - **CLP($\mathbb{R}$)** doménou proměnných je množina reálných čísel
- Cíl
  - využít syntaktické a výrazové přednosti LP
  - dosáhnout větší efektivity

Od LP k CLP I.

- CLP: rozšíření logického programování o omezující podmínky
- CLP systémy se liší podle typu domény
  - **CLP($\mathcal{A}$)** generický jazyk
  - **CLP(FD)** domény proměnných jsou konečné *(Finite Domains)*
  - **CLP($\mathbb{R}$)** doménou proměnných je množina reálných čísel
- Cíl
  - využít syntaktické a výrazové přednosti LP
  - dosáhnout větší efektivity
- **Unifikace v LP je nahrazena splňováním podmínek**
  - unifikace se chápe jako **jedna z** podmínek
  - `A = B`
  - `A #< B,   A in 0..9,   domain([A,B],0,9),   all_distinct([A,B,C])`

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques***, **propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
  - `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
  - `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`
  - po provedení `A #= 1` se z `B #< A` se odvodí: `B #= 0`

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
  - `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`
  - po provedení `A #= 1` se z `B #< A` se odvodí: `B #= 0`
- **Podmínky jako výstup**
  - kompaktní reprezentace nekonečného počtu řešení, výstup lze použít jako vstup

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
  - `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`
  - po provedení `A #= 1` se z `B #< A` se odvodí: `B #= 0`
- **Podmínky jako výstup**
  - kompaktní reprezentace nekonečného počtu řešení, výstup lze použít jako vstup
  - dotaz: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    výstup: `A in 1..2, B in 0..1,`

Od LP k CLP II.

- Pro řešení podmínek se používají **konzistenční techniky**
  - ***consistency techniques*, propagace omezení *(constraint propagation)***
  - omezení: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    domény po propagaci omezení `B #< A`: `A in 1..2, B in 0..1`
- Podmínky jsou deterministicky vyhodnoceny v okamžiku volání podmínky
- **Prohledávání doplněno konzistenčními technikami**
  - `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`
  - po provedení `A #= 1` se z `B #< A` se odvodí: `B #= 0`
- **Podmínky jako výstup**
  - kompaktní reprezentace nekonečného počtu řešení, výstup lze použít jako vstup
  - dotaz: `A in 0..2, B in 0..2, B #< A`

    výstup: `A in 1..2, B in 0..1, B #< A`

Syntaxe CLP

- Výběr jazyka omezení
- CLP klauzule

  jako LP klauzule, ale její tělo může obsahovat omezení daného jazyka

```
p(X,Y) :- X #< Y+1, q(X), r(X,Y,Z).
```

- Rezoluční krok v LP
  - kontrola existence nejobecnějšího unifikátoru (MGU) mezi cílem a hlavou
- Krok odvození v CLP také zahrnuje
  - kontrola konzistence aktuální množiny omezení s omezeními v těle klauzule

⇒ Vyvolání dvou řešičů: unifikace + řešič omezení

Operační sémantika CLP

- CLP výpočet cíle G
  - $Store$ množina aktivních omezení $\equiv$ **prostor omezení *(constraint store)***
  - inicializace $Store = \emptyset$
  - seznamy cílů v G prováděny v obvyklém pořadí
  - pokud narazíme na cíl s omezením c: $NewStore = Store \cup \{c\}$
  - snažíme se splnit c vyvoláním jeho řešiče
    - při neúspěchu se vyvolá backtracking
    - při úspěchu se podmínky v $NewStore$ zjednoduší propagací omezení
  - zbývající cíle jsou prováděny s upraveným $NewStore$
- CLP výpočet cíle G je úspěšný, pokud se dostaneme z iniciálního stavu $\langle G, \emptyset \rangle$ do stavu $\langle G', Store \rangle$, kde G' je prázdný cíl a $Store$ je splnitelná.

CLP($\mathcal{FD}$) v SICStus Prologu

Nejpoužívanější systémy a jazyky pro CP

- **Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog** 1985
  - silná CLP(FD) knihovna, komerční i akademické použití

Nejpoužívanější systémy a jazyky pro CP

- **Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog** 1985
  - silná CLP(FD) knihovna, komerční i akademické použití
- **IC-PARC, Imperial College London, Cisco Systems: ECL^{i}PS^e** 1984
  - široké možnosti kooperace mezi různými řešičemi: konečné domény, reálná čísla, `repair`
  - od 2004 vlastní Cisco Systems volně dostupné pro akademické použití, rozvoj na IC-PARC, platformy: Windows, Linux, Solaris

Nejpoužívanější systémy a jazyky pro CP

- **Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog** 1985
  - silná CLP(FD) knihovna, komerční i akademické použití
- **IC-PARC, Imperial College London, Cisco Systems: ECL^{i}PS^e** 1984
  - široké možnosti kooperace mezi různými řešičemi: konečné domény, reálná čísla, `repair`
  - od 2004 vlastní Cisco Systems volně dostupné pro akademické použití, rozvoj na IC-PARC, platformy: Windows, Linux, Solaris
- **IBM ILOG CP Optimizer, omezující podmínky v C++** 1987
  - špičkový komerční sw, vznikl ve Francii, nedávno zakoupen IBM
  - nyní nově volně dostupný pro akademické použití
  - implementace podmínek založena na objektově orientovaném programování

Nejpoužívanější systémy a jazyky pro CP

- **Swedish Institute of Computer Science: SICStus Prolog** 1985
  - silná CLP(FD) knihovna, komerční i akademické použití
- **IC-PARC, Imperial College London, Cisco Systems: ECL^{i}PS^e** 1984
  - široké možnosti kooperace mezi různými řešičemi: konečné domény, reálná čísla, `repair`
  - od 2004 vlastní Cisco Systems volně dostupné pro akademické použití, rozvoj na IC-PARC, platformy: Windows, Linux, Solaris
- **IBM ILOG CP Optimizer, omezující podmínky v C++** 1987
  - špičkový komerční sw, vznikl ve Francii, nedávno zakoupen IBM
  - nyní nově volně dostupný pro akademické použití
  - implementace podmínek založena na objektově orientovaném programování
- `http://www.fi.muni.cz/~hanka/bookmarks.html#tools`
  - cca 50 odkazů na nejrůznější systémy založené na Prologu, C++, Java, Lisp, . . .

CLP(FD) v SICStus Prologu

- Vestavěné predikáty jsou dostupné v separátním modulu (knihovně)

  ```
  :- use_module(library(clpfd)).
  ```

- Obecné principy platné všude nicméně standarty jsou nedostatečné
  - stejné/podobné vestavěné predikáty existují i jinde
  - CLP knihovny v SWI Prologu i ECLiPSe se liší

Příslušnost k doméně: Range termy

- `?- domain( [A,B], 1,3).` `domain( +Variables, +Min, +Max)`

  `A in 1..3`

  `B in 1..3`

Příslušnost k doméně: Range termy

- `?- domain( [A,B], 1,3).` `domain( +Variables, +Min, +Max)`

  ```
  A in 1..3
  B in 1..3
  ```

- `?- A in 1..8, A #\= 4.` `?X in +Min..+Max`

  ```
  A in (1..3) \/ (5..8)
  ```

Příslušnost k doméně: Range termy

- `?- domain( [A,B], 1,3).` `domain( +Variables, +Min, +Max)`

  `A in 1..3`

  `B in 1..3`

- `?- A in 1..8, A #\= 4.` `?X in +Min..+Max`

  `A in (1..3) \/ (5..8)`

- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel

- `?- A in (1..3) \/ (8..15) \/ (5..9) \/ {100}.` `?X in +Range`

  `A in (1..3) \/ (5..15) \/ {100}`

Příslušnost k doméně: Range termy

- `?- domain( [A,B], 1,3).` domain(+Variables, +Min, +Max)

  `A in 1..3`

  `B in 1..3`

- `?- A in 1..8, A #\= 4.` ?X in +Min..+Max

  `A in (1..3) \/ (5..8)`

- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel

- `?- A in (1..3) \/ (8..15) \/ (5..9) \/ {100}.` ?X in +Range

  `A in (1..3) \/ (5..15) \/ {100}`

- Zjištění domény Range proměnné Var: fd_dom(?Var,?Range)

  - `A in 1..8, A #\= 4, fd_dom(A,Range).` Range=(1..3) \/ (5..8)

Příslušnost k doméně: Range termy

- `?- domain( [A,B], 1,3).` `domain( +Variables, +Min, +Max)`
  ```
  A in 1..3
  B in 1..3
  ```
- `?- A in 1..8, A #\= 4.` `?X in +Min..+Max`
  ```
  A in (1..3) \/ (5..8)
  ```
- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel
- `?- A in (1..3) \/ (8..15) \/ (5..9) \/ {100}.` `?X in +Range`
  ```
  A in (1..3) \/ (5..15) \/ {100}
  ```
- Zjištění domény Range proměnné Var: `fd_dom(?Var,?Range)`
  - `A in 1..8, A #\= 4, fd_dom(A,Range).` `Range=(1..3) \/ (5..8)`
  - `A in 2..10, fd_dom(A,(1..3) \/ (5..8)).` `no`

Příslušnost k doméně: Range termy

- `?- domain( [A,B], 1,3).` `domain( +Variables, +Min, +Max)`

  `A in 1..3`

  `B in 1..3`

- `?- A in 1..8, A #\= 4.` `?X in +Min..+Max`

  `A in (1..3) \/ (5..8)`

- Doména reprezentována jako posloupnost intervalů celých čísel

- `?- A in (1..3) \/ (8..15) \/ (5..9) \/ {100}.` `?X in +Range`

  `A in (1..3) \/ (5..15) \/ {100}`

- Zjištění domény Range proměnné Var: `fd_dom(?Var,?Range)`
  - `A in 1..8, A #\= 4, fd_dom(A,Range).` `Range=(1..3) \/ (5..8)`
  - `A in 2..10, fd_dom(A,(1..3) \/ (5..8)).` `no`

- Range term: reprezentace nezávislá na implementaci

Příslušnost k doméně: FDSet termy

- FDSet term: reprezentace závislá na implementaci
- `?- A in 1..8, A #\= 4, fd_set(A,FDSet).` `fd_set(?Var,?FDSet)`

```
A in (1..3) \/ (5..8)
FDSet = [[1|3],[5|8]]
```

Příslušnost k doméně: FDSet termy

- FDSet term: reprezentace závislá na implementaci
- `?- A in 1..8, A #\= 4, fd_set(A,FDSet).` `fd_set(?Var,?FDSet)`
```
A in (1..3) \/ (5..8)
FDSet = [[1|3],[5|8]]
```
- `?- A in 1..8,A #\= 4, fd_set(A,FDSet),B in_set FDSet.` `?X in_set +FDSet`
```
A in (1..3) \/  (5..8)
FDSet = [[1|3],[5|8]]
B in (1..3) \/  (5..8)
```

Příslušnost k doméně: FDSet termy

- FDSet term: reprezentace závislá na implementaci
- `?- A in 1..8, A #\= 4, fd_set(A,FDSet).` `fd_set(?Var,?FDSet)`

```
A in (1..3) \/ (5..8)
FDSet = [[1|3],[5|8]]
```

- `?- A in 1..8,A #\= 4, fd_set(A,FDSet),B in_set FDSet.` `?X in_set +FDSet`

```
A in (1..3) \/  (5..8)
FDSet = [[1|3],[5|8]]
B in (1..3) \/  (5..8)
```

- FDSet termy představují nízko-úrovňovou implementaci
- FDSet termy nedoporučeny v programech
  - používat pouze predikáty pro manipulaci s nimi
  - omezit použití `A in_set [[1|2],[6|9]]`
- Range termy preferovány

Další `fd_...` predikáty

- `fdset_to_list(+FDset, -List)` vrací do seznamu prvky FDset
- `list_to_fdset(+List, -FDset)` vrací FDset odpovídající seznamu

- `fd_var(?Var)` je Var doménová proměnná?

- `fd_min(?Var,?Min)` nejmenší hodnota v doméně
- `fd_max(?Var,?Max)` největší hodnota v doméně

- `fd_size(?Var,?Size)` velikost domény
- `fd_degree(?Var,?Degree)` počet navázaných omezení na proměnné

Další `fd_...` predikáty

- `fdset_to_list(+FDset, -List)` vrací do seznamu prvky FDset
- `list_to_fdset(+List, -FDset)` vrací FDset odpovídající seznamu

- `fd_var(?Var)` je Var doménová proměnná?

- `fd_min(?Var,?Min)` nejmenší hodnota v doméně
- `fd_max(?Var,?Max)` největší hodnota v doméně

- `fd_size(?Var,?Size)` velikost domény
- `fd_degree(?Var,?Degree)` počet navázaných omezení na proměnné
  - mění se během výpočtu: pouze aktivní omezení, i odvozená aktivní omezení

Aritmetická omezení

- `Expr RelOp Expr` `RelOp -> #= | #\= | #< | #=< | #> | #>=`
  - `A + B #=< 3, A #\= (C - 4) * ( D - 5), A/2 #= 4`
  - POZOR: neplést #=< a #>= s operátory pro implikaci: #<= #=>

Aritmetická omezení

- `Expr RelOp Expr`   `RelOp -> #= | #\= | #< | #=< | #> | #>=`
  - `A + B #=< 3, A #\= (C - 4) * ( D - 5), A/2 #= 4`
  - POZOR: neplést #=< a #>= s operátory pro implikaci: #<= #=>
- `sum(Variables,RelOp,Suma)`
  - `domain([A,B,C,F],1,3), sum([A,B,C],#= ,F)`

Aritmetická omezení

- `Expr RelOp Expr` `RelOp -> #= | #\= | #< | #=< | #> | #>=`
  - `A + B #=< 3, A #\= (C - 4) * ( D - 5), A/2 #= 4`
  - POZOR: neplést #=< a #>= s operátory pro implikaci: #<= #=>
- `sum(Variables,RelOp,Suma)`
  - `domain([A,B,C,F],1,3), sum([A,B,C],#= ,F)`
  - `Variables` i `Suma` musí být doménové proměnné nebo celá čísla
- `scalar_product(Coeffs,Variables,RelOp,ScalarProduct)`
  - `domain([A,B,C,F],1,6), scalar_product( [1,2,3],[A,B,C],#= ,F)`
  - `Variables` i `Value` musí být doménové proměnné nebo konstanty, `Coeffs` jsou celá čísla
  - POZOR na pořadí argumentů, nejprve jsou celočíselné koeficienty, pak dom. proměnné
  - `scalar_product(Coeffs, Variables, #= , Value, [consistency(domain)])`
    - silnější typ konzistence
    - POZOR: domény musí mít konečné hranice

Výroková omezení, reifikace

- **Výroková omezení** pozor na efektivitu
  - `\#` negace, `#/\` konjunkce, `#\/` disjunkce, `#<=>` ekvivalence, ...
  - `X #> 4 #/\ Y #< 6`

Výroková omezení, reifikace

- **Výroková omezení** pozor na efektivitu
  - `\#` negace, `#/\` konjunkce, `#\/` disjunkce, `#<=>` ekvivalence, ...
  - `X #> 4 #/\ Y #< 6`
  - příklad:

    `A#\= 3, A#\= 4` `A#\= 3 #/\ A#\= 4` `A#=1 #\/ A#=2`

    A in (inf..2)\/ (5..sup) A in (inf..2)\/ (5..sup) A in inf..sup

Výroková omezení, reifikace

- **Výroková omezení** pozor na efektivitu
  - \# negace, #/\ konjunkce, #\/ disjunkce, #<=> ekvivalence, ...
  - X #> 4 #/\ Y #< 6
  - příklad:

A#\= 3, A#\= 4	A#\= 3 #/\ A#\= 4	A#=1 #\/ A#=2
A in (inf..2)\/ (5..sup)	A in (inf..2)\/ (5..sup)	A in inf..sup

    tj. propagace disjunkce A#=1 #\/ A#=2 je příliš slabá (propagační algoritmy příliš obecné)

Výroková omezení, reifikace

Výroková omezení   pozor na efektivitu

- `\#` negace, `#/\` konjunkce, `#\/` disjunkce, `#<=>` ekvivalence, ...
- `X #> 4 #/\ Y #< 6`
- příklad:

  `A#\= 3, A#\= 4`   `A#\= 3 #/\ A#\= 4`   `A#=1 #\/ A#=2`

  A in (inf..2)\/ (5..sup)   A in (inf..2)\/ (5..sup)   A in inf..sup

  tj. propagace disjunkce A#=1 #\/ A#=2 je příliš slabá (propagační algoritmy příliš obecné)

Reifikace   pozor na efektivitu

- `Constraint #<=> Bool`

  `Bool in 0..1` v závislosti na tom, zda je `Constraint` splněn
- příklad: `A in 1..10 #<=> Bool`

Výroková omezení, reifikace

- **Výroková omezení** pozor na efektivitu
  - `\#` negace, `#/\` konjunkce, `#\/` disjunkce, `#<=>` ekvivalence, ...
  - `X #> 4 #/\ Y #< 6`
  - příklad:

    `A#\= 3, A#\= 4` `A#\= 3 #/\ A#\= 4` `A#=1 #\/ A#=2`

    A in (inf..2)\/ (5..sup) A in (inf..2)\/ (5..sup) A in inf..sup

    tj. propagace disjunkce A#=1 #\/ A#=2 je příliš slabá (propagační algoritmy příliš obecné)

- **Reifikace** pozor na efektivitu
  - `Constraint #<=> Bool`

    `Bool in 0..1` v závislosti na tom, zda je `Constraint` splněn
  - příklad: `A in 1..10 #<=> Bool`
  - za předpokladu `X in 3..10, Y in 1..4, Bool in 0..1`

    porovnej rozdíl mezi `X#<Y` `X#<Y #<=> Bool`

Výroková omezení, reifikace

- **Výroková omezení** pozor na efektivitu
  - `\#` negace, `#/\` konjunkce, `#\/` disjunkce, `#<=>` ekvivalence, ...
  - `X #> 4 #/\ Y #< 6`
  - příklad:

    `A#\= 3, A#\= 4` | `A#\= 3 #/\ A#\= 4` | `A#=1 #\/ A#=2`

    A in (inf..2)\/ (5..sup) | A in (inf..2)\/ (5..sup) | A in inf..sup

    tj. propagace disjunkce A#=1 #\/ A#=2 je příliš slabá (propagační algoritmy příliš obecné)

- **Reifikace** pozor na efektivitu
  - `Constraint #<=> Bool`

    `Bool in 0..1` v závislosti na tom, zda je `Constraint` splněn
  - příklad: `A in 1..10 #<=> Bool`
  - za předpokladu `X in 3..10, Y in 1..4, Bool in 0..1`

    porovnej rozdíl mezi `X#<Y` a `X#<Y #<=> Bool`

    X = 3, Y = 4 | X in 3..10, Y in 1..4, Bool in 0..1

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

```
exactly(_, [], 0).
```

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

```
exactly(_, [], 0).
exactly(X, [Y|L], N) :-
        X #= Y #<=> B,                           % reifikace
```

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

```
exactly(_, [], 0).
exactly(X, [Y|L], N) :-
        X #= Y #<=> B,                  % reifikace
        N #= M+B,                       % doménová proměnná místo akumulátoru
        exactly(X, L, M).
```

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

```
exactly(_, [], 0).
exactly(X, [Y|L], N) :-
        X #= Y #<=> B,                  % reifikace
        N #= M+B,                       % doménová proměnná místo akumulátoru
        exactly(X, L, M).
```

  - `| ?- domain([A,B,C,D,E,N],1,2), exactly(1,[A,B,C,D,E],N),`

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

```
exactly(_, [], 0).
exactly(X, [Y|L], N) :-
        X #= Y #<=> B,                          % reifikace
        N #= M+B,            % doménová proměnná místo akumulátoru
        exactly(X, L, M).
```

  - `| ?- domain([A,B,C,D,E,N],1,2), exactly(1,[A,B,C,D,E],N),A#< 2,`

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

```
exactly(_, [], 0).
exactly(X, [Y|L], N) :-
        X #= Y #<=> B,                     % reifikace
        N #= M+B,                          % doménová proměnná místo akumulátoru
        exactly(X, L, M).
```

  - `| ?- domain([A,B,C,D,E,N],1,2), exactly(1,[A,B,C,D,E],N),A#< 2,B#< 2.`

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

```
exactly(_, [], 0).
exactly(X, [Y|L], N) :-
        X #= Y #<=> B,                                   % reifikace
        N #= M+B,               % doménová proměnná místo akumulátoru
        exactly(X, L, M).
```

  - `| ?- domain([A,B,C,D,E,N],1,2), exactly(1,[A,B,C,D,E],N),A#< 2,B#< 2.`

    `A = 1, B = 1, C = 2, D = 2, E = 2, N = 2`

Příklad: reifikace

- Přesně N prvků v seznamu S je rovno X: `exactly(X,S,N)`

```
exactly(_, [], 0).
exactly(X, [Y|L], N) :-
        X #= Y #<=> B,                     % reifikace
        N #= M+B,                          % doménová proměnná místo akumulátoru
        exactly(X, L, M).
```

  - `| ?- domain([A,B,C,D,E,N],1,2), exactly(1,[A,B,C,D,E],N),A#< 2,B#< 2.`

    `A = 1, B = 1, C = 2, D = 2, E = 2, N = 2`

- Vyzkoušejte si
  - `greaters(X,S,N)`: přesně N prvků v seznamu S je větší než X
  - `atleast(X,S,N)`: alespoň N prvků v seznamu S je rovno X
  - `atmost(X,S,N)`: nejvýše N prvků v seznamu S je rovno X

Základní globální omezení

- `all_distinct(List)`
  - všechny proměnné různé
- `cumulative(...)`, `cumulatives(...)`
  - disjunktivní a kumulativní rozvrhování

Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
  - `all_distinct` má úplnou propagaci
  - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci

Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
  - `all_distinct` má úplnou propagaci
  - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci
- Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
  - `all_distinct` má úplnou propagaci
  - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci
- Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny
  - `all_distinct([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`

    ```
    Jan = 6, Ota = 2, Anna = 5,
    Marie = 1, Petr in 3..4, Eva in 3..4
    ```

učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Všechny proměnné různé

- `all_distinct(Variables)`, `all_different(Variables)`
- Proměnné v seznamu `Variables` jsou různé
- `all_distinct` a `all_different` se liší úrovní propagace
  - `all_distinct` má úplnou propagaci
  - `all_different` má slabší (neúplnou) propagaci
- Příklad: učitelé musí učit v různé hodiny
  - `all_distinct([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`

    ```
    Jan = 6, Ota = 2, Anna = 5,
    Marie = 1, Petr in 3..4, Eva in 3..4
    ```
  - `all_different([Jan,Petr,Anna,Ota,Eva,Marie])`

    ```
    Jan in 3..6, Petr in 3..4, Anna in 2..5,
    Ota in 2..4, Eva in 3..4, Marie in 1..6
    ```

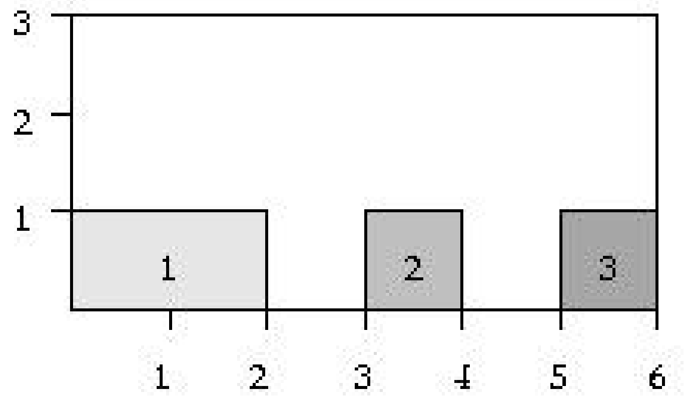
učitel	min	max
Jan	3	6
Petr	3	4
Anna	2	5
Ota	2	4
Eva	3	4
Marie	1	6

Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (**nezáporné** `Duration`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly

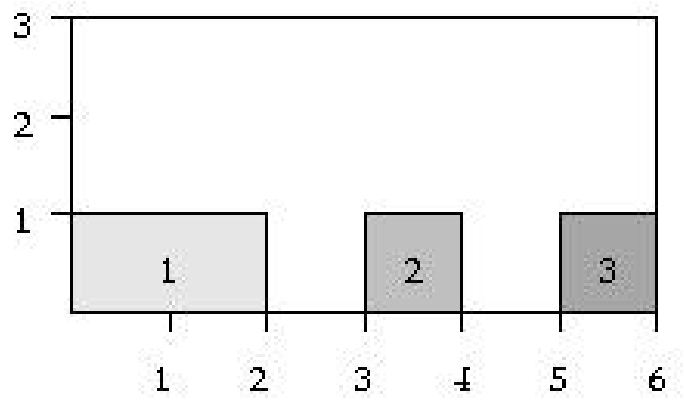
Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start,End`), dobou trvání (**nezáporné** `Duration`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly
  - příklad s konstantami: `cumulative`([task(0,2,2,1,1), task(3,1,4,1,2), task(5,1,6,1,3)])



Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

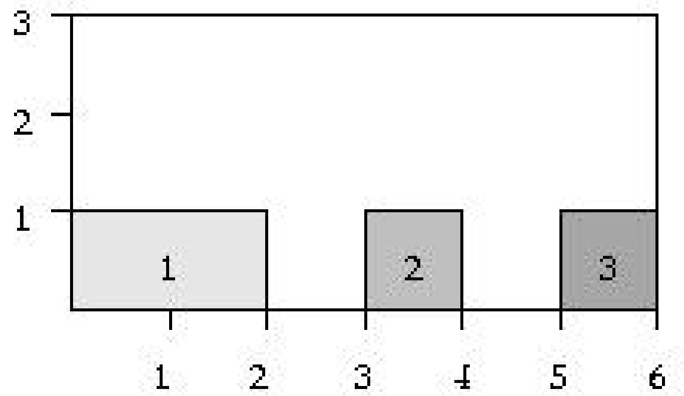
- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (**nezáporné** `Duration`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly
  - příklad s konstantami: `cumulative`([task(0,2,2,1,1), task(3,1,4,1,2), task(5,1,6,1,3)])



  - příklad: vytvoření rozvrhu, za předpokladu, že **doba trvání hodin není stejná**

Disjunktivní rozvrhování (unární zdroj)

- `cumulative([task(Start, Duration, End, 1, Id) | Tasks])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (**nezáporné** `Duration`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly
  - příklad s konstantami: `cumulative`([task(0,2,2,1,1), task(3,1,4,1,2), task(5,1,6,1,3)])



  - příklad: vytvoření rozvrhu, za předpokladu, že **doba trvání hodin není stejná**

```
JanE#= Jan+1, PetrE#= Petr+1, AnnaE#= Anna+2,
cumulative(task(Jan,1,JanE,1,1),task(Petr,1,PetrE,1,2),task(Anna,1,AnnaE,1,3),
  task(Ota,2,OtaE,1,4),task(Eva,2,EvaE,1,5),task(Marie,3,MarieE,1,6)])
```

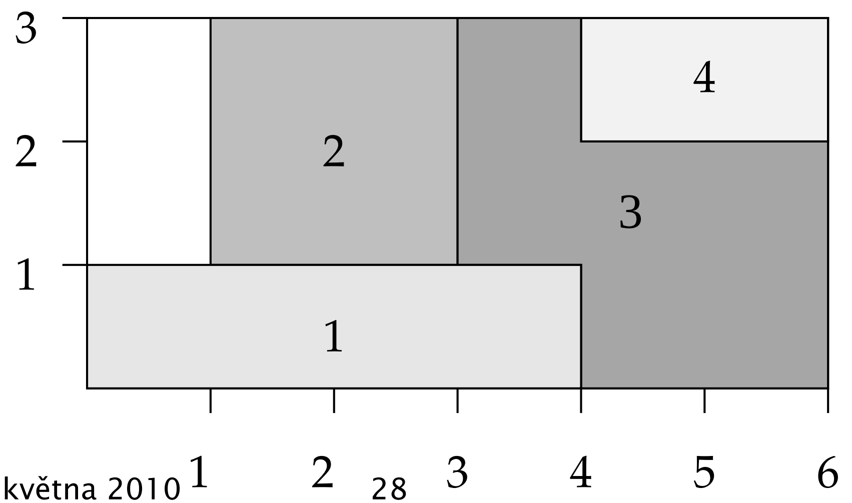
Kumulativní rozvrhování

- `cumulative([task(Start,Duration,End,Demand,TaskId) | Tasks],`
  `[limit(Limit)])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start`,End), dobou trvání (**nezáporné** `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (Demand) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly a aby celková kapacita zdroje nikdy nepřekročila `Limit`

Kumulativní rozvrhování

- `cumulative([task(Start,Duration,End,Demand,TaskId) | Tasks],`
  `[limit(Limit)])`
- Rozvržení úloh zadaných startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (**nezáporné** `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (`Demand`) a identifikátorem (`Id`) tak, aby se nepřekrývaly a aby celková kapacita zdroje nikdy nepřekročila `Limit`
- Příklad s konstantami:

```
cumulative([task(0,4,4,1,1),task(1,2,3,2,2),task(3,3,6,2,3),task(4,2,6,1,4)],[limit(3)])
```



Kumulativní rozvrhování s více zdroji

- Rozvržení úloh tak, aby se nepřekrývaly a daná kapacita zdrojů nebyla překročena (limit zdroje chápán jako horní mez – `bound(upper)`)
- ```
  cumulatives([task(Start,Duration,End,Demand,MachineId)|Tasks],
              [machine(Id,Limit)|Machines],[bound(upper)])
  ```
- Úlohy zadány startovním a koncovým časem (`Start`,`End`), dobou trvání (nezáporné `Duration`), požadovanou kapacitou zdroje (`Demand`) a požadovaným typem zdroje (`MachineId`)
- Zdroje zadány identifikátorem (`Id`) a kapacitou (`Limit`)
  ```

Kumulativní rozvrhování s více zdroji

- Rozvržení úloh tak, aby se nepřekrývaly a daná kapacita zdrojů nebyla překročena (limit zdroje chápán jako horní mez – bound(upper))
- `cumulatives([task(Start,Duration,End,Demand,MachineId)|Tasks],`
  `[machine(Id,Limit)|Machines],[bound(upper)])`
- Úlohy zadány startovním a koncovým časem (Start,End), dobou trvání (nezáporné Duration), požadovanou kapacitou zdroje (Demand) a požadovaným typem zdroje (MachineId)
- Zdroje zadány identifikátorem (Id) a kapacitou (Limit)
- Příklad:

```
?- domain([B,C],1,2),
   cumulatives([task(0,4,4,1,1),task(3,1,4,1,B), task(5,1,6,1,C)],
               [machine(1,1),machine(2,1)],
               [bound(upper)]).                    C in 1..2, B=2
```