Drsná matematika I – 7. Praktická přednáška
A znovu vektory složitěji

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

7. 11. 2007

Obsah přednášky

Plán přednášky

Vektorový prostor V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je množina s operací sčítání, pro kterou platí axiomy komutativní grupy, a násobení skaláry takové, že platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$
$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$
$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Příklad 1. Rozhodněte o následujících množinách, jestli jsou vektorovými prostory nad tělesem reálných čísel:

1. Množina řešení systému lineárních rovnic.
2. Množina řešení homogenní diferenční rovnice.
3. Množina řešení nehomogenní diferenční rovnice.
4. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(x) = c, c \in \mathbb{R}\}$

Plán přednášky

Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subset V$.

Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subset V$.
Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \dots, v_k \subset V$.
Množina vektorů $M \subset V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \dots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů $v_1, \dots, v_k$ nazveme *lineárně nezávislou* jestliže $v_1, \dots, v_k$ jsou po dvou různé a $\{v_1, \dots, v_k\}$ je lineárně nezávislá.

Příklad 2.
Ujasněte si, jak vypadají báze následujcích prostorů:
(1) $\mathbb{K}^n$ má (jako vektorový prostor nad $\mathbb{K}$) dimenzi n. V případě konečného pole skalárů, např. $\mathbb{Z}_k$, má celý vektorový prostor $\mathbb{K}^n$ jen konečný počet prvků. Kolik?
(2) $\mathbb{C}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
(3) $\mathbb{K}_m[x]$, tj. prostor polynomů stupně nejvýše m, má dimenzi $m+1$. Vektorový prostor všech polynomů $\mathbb{K}[x]$?
(4) Vektorový prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$?
(5) Vektorový prostor všech zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Příklad 3. Určete všechny konstanty $a \in \mathbb{R}$ takové, aby polynomy $ax^2 + x + 2$, $-2x^2 + ax + 3$ a $x^2 + 2x + a$ byly lineárně závislé (ve vektorovém prostoru polynomů jedné proměnné stupně nejvýše 3 nad reálnými čísly).

Nechť V_i, $i \in I$, jsou podprostory ve V. Pak podprostor generovaný jejich sjednocením, tj. $\langle \cup_{i\in I} V_i \rangle$, nazýváme **součtem podprostorů** V_i. Značíme $\sum_{i\in I} V_i$. Zejména pro $V_1, \dots, V_k \subset V$,

$$V_1 + \cdots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k \rangle.$$

Příklad 4. Najděte nějakou bázi součtu nebo průniku dvou podprostorů V_1 a V_2 v $\mathbb{R}^3$. Zadejte přitom podprostory buď pomocí rovnic nebo pomocí generátorů.

Plán přednášky

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení (homomorfismus)** jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V$.

Příklad 5. Zvolte si báze v $\mathbb{K}^3$ a naučte se převádět mezi nimi souřadnice.

Příklad 6. Je dáno lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi následující maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napište matici tohoto zobrazení v bázi

$$\begin{aligned} f_1 &= (1,1,0) \\ f_2 &= (-1,1,1) \\ f_3 &= (2,0,1). \end{aligned}$$