inverze:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \sigma(i)$$

$$\uparrow \; \uparrow$$

$2 < 3 \;\wedge\; 3 = \sigma(2) > 1 = \sigma(3)$ je inverze

||| ... 3 inverze

Theorem: důkaz indukcí: zjevně platí pro $n=1$

platí pro $n-1$, $\sigma(1) = a_1, \dots, \sigma(n) = a_n$

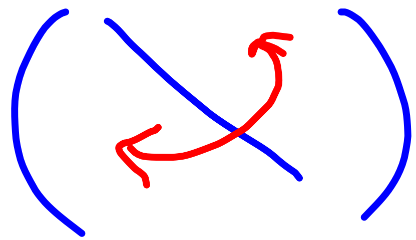
– pro pořadí $a_1, \dots, a_{n-1}$ použijeme předpoklad (zafixujeme)

pak $a_n \leftrightarrow a_i$, stačí jít odzadu na začátek.

Celkem pot. $n \cdot (n-1)!$ permutací s pořad. n.

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = id$$

$$+$$



$$A = (a_{ij}) \qquad A^T = (b_{ij}) \qquad b_{ij} = a_{ji}$$

$\underline{\text{Tk}}$ 1)

$$|A^T| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \overbrace{\operatorname{sgn} \sigma}^{\operatorname{sgn} \sigma^{-1}} \cdot b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \overbrace{\operatorname{sgn} \sigma}^{\operatorname{sgn}\sigma^{-1}\ \text{"}} \underbrace{a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}}_{= a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}}$$

$$= \overbrace{\sum_{\sigma^{-1} \in \Sigma_n}} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$$= |A|$$

2) změna:

3) záměna:

$$|B| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn} \sigma \; \underbrace{b_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots b_{j\sigma(j)} \cdots}_{= a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots}$$

$$= \sum_{\sigma' \in \Sigma_n} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot \; = -|A|$$

kde $\operatorname{sgn} \sigma' = -\operatorname{sgn} \sigma$

4) změna:

5) $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$,

ve i-tém řádku platí $a_{ij} = c_{ij} + b_{ij}$, ostatní řádky stejné

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{(i-1)\sigma(i-1)} \cdot (c_{i\sigma(i)} + b_{i\sigma(i)}) \cdot \ldots$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \; b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{i\sigma(i)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \; c_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot c_{n\sigma(n)} = |B| + |C|$$

6) Pokud jsou v A dva řádky stejné, je $|A| = 0$ (viz. 3)) $(\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}_2)$

$\Rightarrow$ dle 5) můžeme přičíst jiný řádek k danému aniž bychom změnili $|A|$.

totiž z nějakého řádku

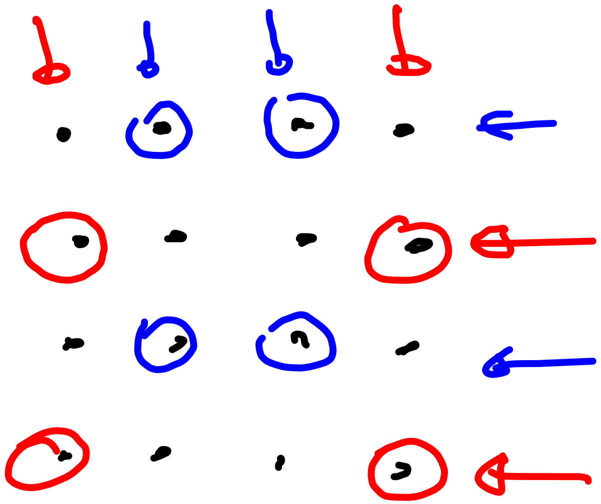
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn} + 0$$

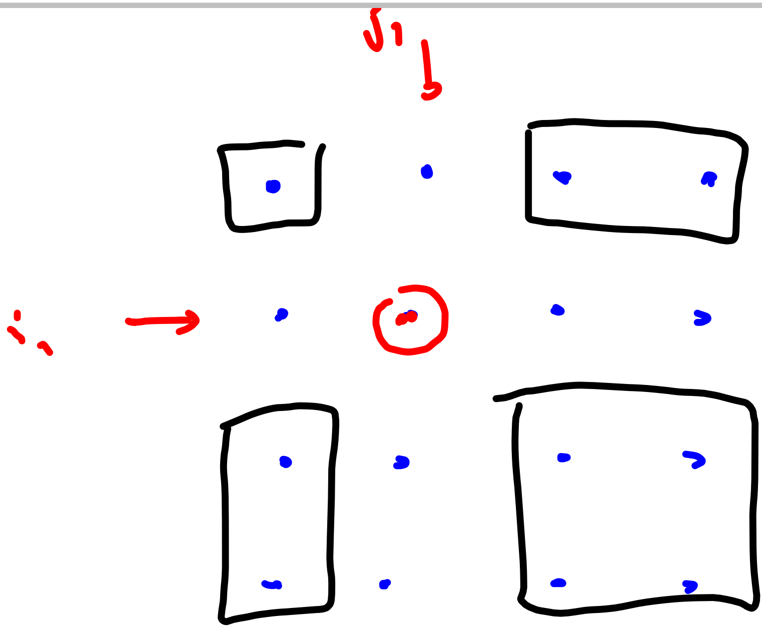
$$\begin{array}{c} \downarrow M \\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = |M|$$

$$4 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = \pm |M^*|$$

$$|M| \cdot |M^*| \pm 1$$





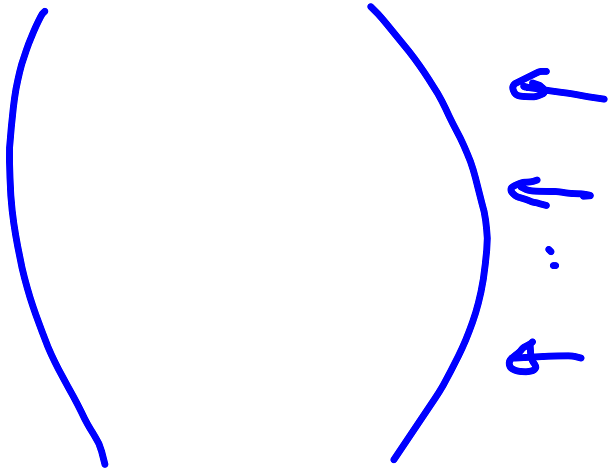
$a_{22} = |M|$ minor

$$+A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

algebraický doplněk

Σ M

$$|A| = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$



k řádků

$\Rightarrow \binom{n}{k}$ výběrů k sloupců, tj. $|M|$

$\Rightarrow$ pro každý z nich $k! \cdot (n-k)!$ členů v součinu $|M| \cdot |M^*|$

$\Rightarrow$ celkem $\binom{n}{k} \cdot k! \, (n-k)! = n!$ různých členů.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} - 1 \cdot \cancel{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$= 12 + 16 - 18 - 16$$

$$= \underline{\underline{-6}}$$

Rozvinuji podle sloupce

A, B

$$H = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right)$$

Laplace dle 1. n řádků

$\Rightarrow$

$$|H| = |A| \cdot |B|$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & ? \\ \hline -E & 0 \end{array}\right)$$

b_{11} b_{21} b_{n1}

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} & A & & & & 0 & & \\ \hline -1 & & & & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & -1 & & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ 0 & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

násobíme:

$$\boxed{b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + \dots b_{n1}a_{1n}}$$

vyjde c_{11}

$\Rightarrow C = A \cdot B$

$$\cancel{2}n(2n+1)/\cancel{2} + n = 2n^2 + 2n = 2n(n+1)$$

$$A \cdot B = E \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1$$

$$A^* = (A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

~~vSled~~ $n=2$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^*$$

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = |A| \cdot E$$

$$C = A \cdot A^* = (c_{ij})$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$$

1) $i = j$: jde o Laplaceův rozvoj $|A|$ podle i-tého řádku

2) $i \neq j$: Laplaceův rozvoj jiné matice s dvěma stejnými řádky