Iterační procesy: $x_n \in V \longmapsto A\cdot x_n = x_{n+1}$

dim n matice $n \times n$

hledáme

Příklad: $A\cdot x = b$ $\leftarrow$ řešení systému lin. rovnic

pevné   předem dané

pro $A\cdot x = 0$ (homogenní) je prostor řešení vektorový prostor $\Rightarrow$ báze řešení = fundamentální systém

všechna řešení systému $A\cdot x = b$ (nehomogenní) = 1 partikulární + všechna homogenní

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = A \qquad A \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \cancel{4}\ 5 \end{pmatrix} \ ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & \cancel{4}\ 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{-1}\ 0 \end{array}\right) \Big\}\ 3 \text{ určit}$$

2 určité

⇒ řešení pro pravou stranu $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{HOMOGENNÍ}$$

$$w = \begin{pmatrix} 2 - 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{partikulární}$$

$$\boxed{u = c \cdot v + w}$$

Příklad: iterace v populačním modelu

pět skupin podle stáří (třídy věku)

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x_n =: x_{n+1} \qquad \left(= \lambda \cdot x_n \; ? \right)$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} f_1 - \lambda & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^5 - \boxed{a\lambda^4 - b\lambda^3 - c\lambda^2 - d\lambda - e}$$

$a, b, c, d, e \geq 0$

$$= \lambda^5 \left(1 - \underbrace{\tfrac{1}{\lambda^5}(\cdot\!/\!\cdot)}_{=1 \text{ pro právě } 1\ \lambda}\right)$$

$\Rightarrow$ tj. právě jedno nezáporné reálné λ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

λ: $1{,}03$

0

$-0{,}5$

$-0{,}27 \pm 0{,}78 i$

$$x^T = (30 \quad 27 \quad 21 \quad 14 \quad 8)$$

(Leslieho model populace)

Úlohy s modelem:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Víme, že populace je stabilní v počtu.

Kolik je a?

Řešení:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ a & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2a - 2a\lambda$$

má kořen 1 pro $\underline{\underline{a = 1/4}}$.

Markovový proces (diskrétní)

$x_{n+1} := T \cdot x_n$, $x_n \in V$ $\dim V = m$

x_n vyjadřuje pravděpodobnost jednotlivých stavů

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ kde x_i je pravděpodobnost stavu i.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} x_j = 1$

Příklad: 2 TV, po roce 1/6 první přejde k druhé 1/5 druhé k první.

$$T = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/5 \\ 1/6 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Σ 1 1

← stochastická matice

$$|T-\lambda E| = \begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\sum \quad 1-\lambda \quad 1-\lambda \quad \cdots \quad 1-\lambda$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ je kořen

navíc $0 < t_{ij} \leq 1$

$\Big\}$ $\Rightarrow$ navíc ostatní $|\lambda| < 1$

$\Rightarrow$ iterace konverguje k stacionárnímu vektoru: $T - E = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/5 \\ 1/6 & -1/5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Homogenní lineární diferenční rovnice.

Problém: jsou posloupnosti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

splňují $\boxed{a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} = 0,}$

$a_0 \neq 0, \quad a_k \neq 0$

$\boxed{\text{řád } k}$

$x_n = b_1 x_{n-1} + \dots + b_k x_{n-k}$

Řešení: Vezmeme $x_k = \lambda^k$ (funguje řešení pro $k=1$)

$x_n = b x_{n-1}$

$x_0, x_1 = b x_0, \dots, x_n = b^n x_0$

$0 = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_k \lambda^{n-k} =$

$= \underbrace{\lambda^{n-k}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots a_k \lambda^0)}_{= 0}$

CHARAKT. POLY

$(x_n), (y_n)$ řeší $\Rightarrow$ $(c_1 x_n + c_2 y_n)$ také

$\Rightarrow$ množina řešení tvoří vekt. prostor

dim k !

generátory jsou $(x_n) = (\lambda_i^n)$, λ_i kořeny

pro různé λ_i jsou nezávislé

pro vícenásobné kořeny λ: $(x_n) = (\lambda^n)$

$(x_n') = (n \lambda^n)$

$\vdots$

Př. $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $\boxed{x_1 = 2,\ x_2 = 2}$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$$

$\Rightarrow$ obecné řešení: $x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-1)^n$

dosadíme:

$$x_1 = 2 = 2C_1 - C_2$$
$$x_2 = 2 = 4C_1 + C_2$$

$$4 = 6C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}$$
$$C_2 = -\frac{2}{3}$$

hledané řešení:

$$\boxed{x_n = \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3}(-1)^n}$$

Jak pro nehomogenní:

Př. $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + \overset{p(n)}{1}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2$

Obecné řešení lin. rovnic: 1 partikulární ř. + všechna homogenní = všechna ř.

$a_n x_n + \dots + a_{n-k} x_{n-k} = p(n)$ ← polynom

⇒ řešení ve tvaru $x_n = q(n)$ pol. stejného stupně

$$\underset{x_{n+2}}{q} = \underset{x_{n+1}}{q} + \underset{2x_n}{2q} + 1 \quad = \quad q = -1/2$$

⇒ obecné řešení je

$$\boxed{c_1 \cdot (-1)^n + c_2 \cdot 2^n - 1/2}$$

$$x_1 = 2 = -c_1 + 2c_2 - 1/2$$

$$x_2 = 2 = +c_1 + 4c_2 - 1/2$$

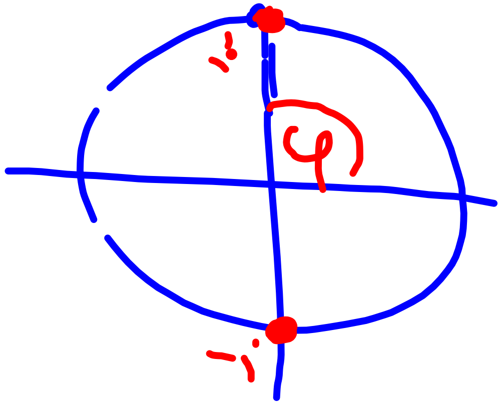
$$4 = 6c_2 - 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{5}{6}$$

$$2 = -c_1 + \frac{5}{3} - 1/2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_n = \frac{5}{6}(-1)^{n-1} + \frac{5}{3}2^{n-1} - 1/2}$$

Př.:

$$\boxed{x_{n+2} = -x_n}$$



$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$\boxed{x_n = C_1 i^n + C_2 (-i)^n}$$

$$z_\pm = \boxed{\cos\varphi \pm i \sin\varphi}$$

$$z^n = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi$$

báze řešení je tohle!

$$\boxed{x_n = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi)}$$

$\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

$$\Big\downarrow T$$

$$z_n = (Tx)_n = x_{n+2} + x_n$$

← lineární filtr

$\dots, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots$

$\quad\;\; \shortparallel \qquad \shortparallel \qquad \shortparallel$

$\dots, x_{-1}+x_1, x_0+x_2, x_1+x_3, \dots$