

Cvičení 4 – opakování

Zderivujte funkce:

- | | |
|--|---|
| <p>(a) $f(x) = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$;</p> <p>(b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;</p> <p>(c) $f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{1 + \sqrt[3]{2x}}$;</p> <p>(d) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$;</p> <p>(e) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}, a \neq 0$;</p> <p>(f) $f(x) = \frac{x^3}{3\sqrt{(1 + x^2)^3}}$;</p> <p>(g) $f(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}, a > 0$;</p> <p>(h) $f(x) = \cos^2 x$;</p> <p>(i) $f(x) = 3 \sin^2 x - \sin^3 x$;</p> | <p>(j) $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$;</p> <p>(k) $f(x) = \sin^2(\cos 3x)$;</p> <p>(l) $f(x) = \sin \sqrt{1 + x^2}$;</p> <p>(m) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x^2}$;</p> <p>(n) $f(x) = \arccos \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$;</p> <p>(o) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}$;</p> <p>(p) $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$;</p> <p>(q) $f(x) = e^{\sin^2 x}$;</p> <p>(r) $f(x) = 3^{\operatorname{cotg} \frac{1}{x}}$;</p> |
|--|---|

Výsledek:

- | | |
|---|---|
| <p>(a) $30(3 - 10x)(1 + 3x - 5x^2)^{29}$;</p> <p>(b) $\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1, 1)$;</p> <p>(c) $\frac{-4}{3\sqrt[3]{4x^2(1 + \sqrt[3]{2x})^2}}, x \neq -\frac{1}{2}, 0$;</p> <p>(d) $\frac{x - 1}{x^2 \sqrt{2x^2 - 2x + 1}}, x \neq 0$;</p> <p>(e) $\frac{x(x^2 + 2a^2)}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$;</p> <p>(f) $\frac{x^2}{\sqrt{(1 + x^2)^5}}$;</p> <p>(g) $-\frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}}, x \in (-a, a)$;</p> <p>(h) $-\sin 2x$;</p> <p>(i) $\frac{3}{2} \sin 2x(2 - \sin x)$;</p> <p>(j) $1 + \operatorname{tg}^6 x$, vyjádřete $\cos^2 x$ pomocí $\operatorname{tg} x, x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$;</p> <p>(k) $-3 \sin 3x \sin(2 \cos 3x)$;</p> <p>(l) $\frac{x \cos \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}$;</p> | <p>(m) $\frac{-2}{x\sqrt{x^4 - 1}}, x > 1$;</p> <p>(o) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 2x - 2x^2}}, x \in \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$;</p> <p>(p) $\frac{5}{x^4 + 13x^2 + 36}$;</p> <p>(q) $\frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x \ln x}, x > 1$;</p> <p>(r) $e^{\sin^2 x} \sin 2x$;</p> <p>(s) $\frac{3^{\operatorname{cotg} \frac{1}{x}} \ln 3}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}}, x \neq 0, \frac{1}{k\pi}, k \in \mathbf{Z} - \{0\}$;</p> |
|---|---|

1. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $x = a$

(a) $y = \sqrt{x}$, $a = 9$

(b) $y = x^3 + 2x$, $a = 1$

(c) $y = \frac{3x - 4}{2x - 3}$, $a = 2$

(d) $y = 2\sqrt{2} \sin x$, $a = \frac{\pi}{4}$

(e) $y = \ln(x + 1)$, $a = 0$

(f) $y = e^{-x} \cos 2x$, $a = 0$

2. Derivujte podle x funkce tvaru $y = p(x)^{q(x)}$

(a) $y = (x + 1)^x$

(b) $y = x^{x+1}$

(c) $y = x^{\sqrt{x}}$

(d) $y = (\cos x)^{\cos x}$

(e) $y = x^{\lg x}$

(f) $y = (\ln x)^{\ln x}$

Řešení:

1. (a) $t: x - 6y + 9 = 0, n: 6x + y - 57 = 0$; (b) $t: 5x - y - 2 = 0, n: x + 5y - 16 = 0$;
 (c) $t: x + y - 4 = 0, n: x - y = 0$; (d) $t: 2x - y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0, n: x + 2y - 4 - \frac{\pi}{4} = 0$;
 (e) $t: y = x, n: y = -x$; (f) $t: x + y - 1 = 0, n: x - y + 1 = 0$

2. (a) $y' = (x + 1)^x (\ln(x + 1) + \frac{x}{x+1})$; (b) $y' = x^{x+1} (\ln x + \frac{x+1}{x})$; (c) $y' = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$;

(d) $y' = -\sin x \cdot (\cos x)^{\cos x} (1 + \ln(\cos x))$; (e) $y' = x^{\lg x} \times (\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\lg x}{x})$; (f) $y' = (\ln x)^{\ln x} \cdot \frac{\ln(\ln x) + 1}{x}$

1. Vypočtete derivaci elementární funkce $y = 6\sqrt{x} + \sqrt{7}$

(A) $\frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{7}$ (B) $\frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{6}{2\sqrt{7}}$ (C) $\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{7}}$ (D) $\frac{3}{\sqrt{x}}$

(E) žádný z uvedených výsledků není správný

2. Jestliže $y = 3e^x + \ln x \cdot \cos x$, potom hodnota $y'(1)$ je

(A) $3e$ (B) $3e - 1$ (C) $3e + 1$ (D) $e + 1$

(E) není žádná z uvedených

3. Pro funkci $y = x^3 - x$ máme určit velikost úhlu, který svírá tečna jejího grafu s kladně orientovanou osou "x" v bodě $a = 1.2$. Výsledek zaokrouhlete na celé stupně.

(A) 71° (B) 72° (C) 73° (D) 74° (E) žádný z uvedených úhlů

4. Najděte rovnici tečny ke křivce $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ v bodě $a = 1$.

(A) $x + y - 1 = 0$ (B) $x - y + 1 = 0$ (C) $x + 2y + 1 = 0$

(D) $x - 2y - 1 = 0$ (E) žádná z uvedených

5. Najděte rovnici normály grafu funkce $y = \frac{x-1}{x+1}$ v bodě $a = 1$.

(A) $2x + y - 2 = 0$ (B) $x + y - 1 = 0$ (C) $x - y - 1 = 0$

(D) $2x - y - 1 = 0$ (E) žádná z uvedených.

6. Je-li $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$, pak tečna grafu funkce g v bodě $a = 2$ protíná osu y v bodě

(A) $[0, -11]$ (B) $[0, -2]$ (C) $[0, 1]$ (D) $[0, 11]$ (E) jiný výsledek.

Řešení: 1D 2E 3C 4D 5A 6A