Cvičení 5 – opakování

Najděte intervaly monotonie uvedených funkcí

(a) $y = x^3 - x$

(b) $y = x^5 - 15x^3 + 3$

(c) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

(d) $y = |x+1| + |x-1|$

(e) $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{1-x}$

(f) $y = x + \dfrac{x}{x^2-1}$

(g) $y = \mathrm{e}^{x^2+8x+12}$

(h) $y = x^2 - 1 + |x^2 - 1|$

Určete intervaly, na kterých jsou dané funkce konvexní, popř. konkávní, a najděte všechny jejich inflexní body

(a) $y = 5x^2 + 20x + 7$

(b) $y = x(1-x)^2$

(c) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2$

(d) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

(e) $y = 2 - \mid x^2 - 2 \mid$

(f) $y = x^2 - 1 + \sqrt[3]{x^2}$

(g) $y = x + \frac{1}{x^2}$

(h) $y = \frac{x}{1+x^2}$

(i) $y = x + \frac{2x}{1-x^2}$

(j) $y = \frac{x^3}{x^2+27}$

(k) $y = x + \sqrt[3]{x^5}$

(l) $y = 3 - (x+2)^{\frac{7}{5}}$

(m) $y = 4(x-1)^{\frac{5}{2}} + 20(x-1)^{\frac{3}{2}}$

(n) $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}$

(o) $y = x \ln x$

(p) $y = 1 - \ln(x^2 - 9)$

(q) $y = x^x$

(r) $y = 3x^2 - x^3$

Najděte absolutní maxima a minima funkcí na daném intervalu:

(a) $y = x^2 - 6x + 10, \quad \langle -1, 5 \rangle$

(b) $y = x^3 - 3x + 20, \quad \langle -3, 3)$

(c) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad \langle -2, 1 \rangle$

(d) $y = \mid x^2 - 6x + 5 \mid, \quad \langle -5, 5)$

(e) $y = x + \frac{1}{x-1}, \quad (-4, 0 \rangle$

(f) $y = x + \frac{2x}{x^2-1}, \quad \langle 1.01, 2 \rangle$

(g) $y = \sqrt[3]{(x^2-x)^2}, \quad (-3, 2)$

(h) $y = x - 2\ln x, \quad \langle 1, e \rangle$

(i) $y = x^2 \ln x, \quad \langle 1, e \rangle$

(j) $y = x^x, \quad (0, +\infty)$

(k) $y = 2\sin x + \cos 2x, \quad \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

(l) $y = \cos 2x - 2x, \quad \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

Najděte všechny lokální extrémy funkcí a vypočítejte funkční hodnoty v nich:

(a) $y = x^2(x-6)$

(b) $y = x^3 - 12x - 6$

(c) $y = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7$

(d) $y = 4x^3 - 3x^2 - 36x - 5$

(e) $y = -x^4 - 2x^2 + 3$

(f) $y = x(x-1)^2(x-2)^3$

(g) $y = \frac{x-1}{x}$

(h) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^3}$

(i) $y = x + \frac{2x}{1+x^2}$

(j) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$

(k) $y = 4 \mid x+4 \mid -5 \mid x \mid +2 \mid x-1 \mid$

(l) $y = x^3 + 2 \mid x \mid$

(m) $y = 1 + \sqrt{\mid x \mid}$

(n) $y = \sqrt{6x - x^2}$

(o) $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$

(p) $y = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$

(q) $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$

(r) $y = \sin x + \cos x$

(s) $y = 4x - \operatorname{tg} x$

(t) $y = (\frac{1}{2} - x)\cos x + \sin x - \frac{x^2 - x}{4}$

(u) $y = \operatorname{arctg} \mid x - 1 \mid$

(v) $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

Řešení:

(a) $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ rost., $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ kles.; (b) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ rost., $x \in (-3, 3)$ kles.; (c) $x \in (-1, 1)$ rost., $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ kles.; (d) $x \in (-\infty, -1)$ kles., $x \in (-1, 1)$ neroste ani neklesá, $x \in (1, +\infty)$ rost.; (e) $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$ kles., $x \in (\frac{2}{3}, 1) \cup (1, 2)$ rost.; (f) $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ rost., $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ kles.; (g) $x \in (-\infty, -4)$ kles., $x \in (-4, +\infty)$ rost.; (h) $x \in (-\infty, -1)$ kles., $x \in (-1, 1)$ neroste ani neklesá, $x \in (1, +\infty)$ rost.

(a) $(-\infty, +\infty)$ konvexní; (b) $(-\infty, \frac{2}{3})$ konkávní, $(\frac{2}{3}, 1)$ konvexní, $x = \frac{2}{3}$ inflexní bod; (c) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ konvexní, $(-2, 1)$ konkávní, $x_1 = -2, x_2 = 1$ inflexní body; (d) $(1, +\infty)$ konvexní, $(-\infty, 1)$ konkávní, $x = 0$ inflexní bod; (e) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ konvexní, $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ konkávní; (f) $(-\infty, -\frac{1}{3\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{3\sqrt{3}}, +\infty)$ konvexní, $(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, 0) \cup (0, \frac{1}{3\sqrt{3}})$ konkávní, $x_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ inflexní body; (g) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ konvexní; (h) $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ konvexní, $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ konkávní, $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}$ inflexní body; (i) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ konvexní, $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ konkávní, $x = 0$ inflexní bod; (j) $(-\infty, -9) \cup (0, 9)$ konvexní, $(-9, 0) \cup (9, +\infty)$ konkávní, $x_1 = -9, x_2 = 0, x_3 = 9$ inflexní body; (k) $(0, +\infty)$ konvexní, $(-\infty, 0)$ konkávní, $x = 0$ inflexní bod; (l) $(-\infty, -2)$ konvexní, $(-2, +\infty)$ konkávní, $x = -2$ inflexní bod; (m) $(1, +\infty)$ konvexní; (n) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ konvexní, $(1, +\infty)$ konkávní; (o) $(0, +\infty)$ konvexní; (p) $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ konvexní; (q) $(0, +\infty)$ konvexní; (r) $(-\infty, 1)$ konvexní, $(1, +\infty)$ konkávní, $x = 1$ inflexní bod

(a) $-1 \ldots$ max., $f(-1) = 17$; $3 \ldots$ min., $f(3) = 1$; (b) $-3 \ldots$ min., $f(-3) = 2$; (c) $-2 \ldots$ min., $f(-2) = -151$; $1 \ldots$ max.; $f(1) = 2$; (d) $-5 \ldots$ max., $f(-5) = 60$; $1 \ldots$ min., $f(1) = 0$; (e) $0 \ldots$ min., $f(0) = -1$; (f) $1.01 \ldots$ max., $f(1.01) \doteq 101.5$; $2 \ldots$ min., $f(2) = \frac{10}{3}$; (g) $0, 1 \ldots$ min., $f(0) = 0, f(1) = 0$; (h) $1 \ldots$ max., $f(1) = 1$; $2 \ldots$ min., $f(2) = 2 - 2\ln 2$; (i) $e \ldots$ max., $f(e) = e^2$; $1 \ldots$ min., $f(1) = 0$; (j) $e^{-1} \ldots$ min., $f(e^{-1}) \doteq 0.69$; (k) $-\frac{\pi}{2} \ldots$ max., $f(-\frac{\pi}{2}) = -1 + \pi$; $\frac{\pi}{2} \ldots$ min., $f(\frac{\pi}{2}) = -1 - \pi$

(a) $0 \ldots$ max., $f(0) = 0$; $4 \ldots$ min., $f(4) = -32$; (b) $2 \ldots$ min., $f(2) = -10$; $-2 \ldots$ max., $f(-2) = 10$; (c) extrémy neexistují; (d) $2 \ldots$ min., $f(2) = -57$; $-\frac{3}{2} \ldots$ max., $f(-\frac{3}{2}) = \frac{115}{4}$; (e) $0 \ldots$ max., $f(0) = 3$; (f) $1 \ldots$ max., $f(1) = 0$; $\frac{5+\sqrt{13}}{6} \ldots$ min., $f(\frac{5+\sqrt{13}}{6}) \doteq -0.05$; $\frac{5-\sqrt{13}}{6} \ldots$ min., $f(\frac{5-\sqrt{13}}{6}) \doteq -0.76$; (g) extrémy neexistují; (h) $\sqrt[5]{24} \ldots$ min., $f(\sqrt[5]{24}) = \sqrt[5]{24^2} - \frac{8}{[illegible]}$; (i) extrémy neexistují; (j) $1 \ldots$ max., $f(1) = 10$; $\frac{1}{2} \ldots$ min., $f(\frac{1}{2}) = 8$; (k) $0 \ldots$ max., $f(0) = 18$; $-4, 1 \ldots$ min., $f(-4) = -10, f(1) = 15$; (l) $\sqrt{\frac{2}{3}} \ldots$ min., $f(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{-4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$; $0 \ldots$ max., $f(0) = 0$; (m) $0 \ldots$ min., $f(0) = 1$; (n) $3 \ldots$ max., $f(3) = 3$; (o) $0 \ldots$ max., $f(0) = 3$; (p) $0 \ldots$ max., $f(0) = 1$; $1, -1 \ldots$ min., $f(1) = f(-1) = 0$; (q) $2 \ldots$ min., $f(2) = -\sqrt[3]{44}$; $-3 \ldots$ max., $f(-3) = 3\sqrt[3]{3}$; (r) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ldots$ max., $f(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) = \sqrt{2}$; $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \ldots$ min., $f(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi) = -\sqrt{2}$; (s) $\frac{\pi}{3} + k\pi \ldots$ max., $f(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = 4(\frac{\pi}{3} + k\pi) - \sqrt{3}$; $\frac{2\pi}{3} + k\pi \ldots$ min., $f(\frac{2\pi}{3} + k\pi) = 4(\frac{2\pi}{3} + k\pi) + \sqrt{3}$; (t) $\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ldots$ max., $f(\frac{1}{2}) = \sin\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$; $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ldots$ min.; (u) $1 \ldots$ min., $f(1) = 0$; (v) $1 \ldots$ max., $f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

Př. *1*
Zjistěte, zda jsou funkce v bodě $a = 4$ rostoucí nebo klesající, konvexní nebo konkávní:

- $y = x^3 - 49x + 76$
- $y = 5x^2 + e^x$
- $y = 2\sqrt{x}$

[klesá, konvexní; roste, konvexní; roste, konkávní]

Př. *2*
Zjistěte, zda je funkce v bodě $a = \frac{\pi}{3}$ rostoucí nebo klesající:

- $y = 2\sin(x) - \cos(x)$

[roste]

Př.3:
Je dána funkce $f : y = \ln(x^2 + 2x + 2)$ a bod $a = 5$.

- Určete definiční obor funkce.
- Určete, zda je funkce rostoucí nebo klesající v bodě a.
- Určete intervaly, kde je funkce rostoucí a kde klesající.
- Najděte lokální extrémy.

[R; roste, klesá na $(-\infty, -1)$, roste na $(-1, \infty)$, v $x = -1$ lok. minimum 0]

Př.4:
Je dána funkce $f : y = \frac{x^2-3x}{x^2+3}$ a bod $a = 3$.

- Určete definiční obor funkce.
- Určete, zda je funkce rostoucí nebo klesající v bodě a.
- Určete rovnici tečny v bodě a.
- Najděte absolutní minimum a maximum na intervalu $\langle -5, 3 \rangle$.

[R; roste; $y = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$;
SB=-3,1 ABS.MIN=0, ABS.MAX=1,5]

Určete derivaci implicitně zadaných funkcí:

$$y + xy - x\sin y = 0$$
$$x^2 \ln y + y^2 x = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{y - \sin y}{x\cos y - x - 1} \\ -\dfrac{y(2x\ln y + y^2)}{x(x + 2y^2)} \end{array}\right]$$

Určete rovnici tečny daných funkcí v daném bodě:

$$e^{xy} + \sin y + y^2 = 1, [2;0]$$
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5, [8;1]$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x + 2y = 10 \end{array}\right]$$

Vypočtěte limity l'Hospitalovým pravidlem (pokud nelze pravidlo použít, určete je jinak)

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}$ (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^n}{1-x^m};\ m,n\in \mathrm{N}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^4-1}{x^2}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ (h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$ (i) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{3}{5}}-1}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\cos x-1}$ (n) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x\cos x}{\sin 2x-\cos x}$ (o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ (q) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^3}$ (r) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$

(s) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln(\sin x)}$ (t) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ (u) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$

Řešení:

(a) 4; (b) $\frac{5}{2}$; (c) 1; (d) 0; (e) $\frac{n}{m}$; (f) $+\infty$; (g) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; (h) $\frac{1}{4}$; (i) $\frac{1}{12}$; (j) $\frac{10}{9}$; (k) $\frac{1}{4}$; (l) 1; (m) -2; (n) $+\infty$; (o) $+\infty$; (p) 0; (q) $+\infty$; (r) 1; (s) 1; (t) 1; (u) 1

2. Je dána funkce $y = xe^{x^2}$. Potom pro hodnoty $y''(-1)$, $y''(0)$ a $y''(1)$ platí:

(A) $y''(-1) = y''(0) = y''(1)$ (B) $y''(-1) > y''(0) > y''(1)$ (C) $y''(-1) < y''(0) < y''(1)$
(D) $y''(1) < y''(-1) < y''(0)$ (E) žádný z uvedených vztahů neplatí

3. Je dána funkce $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$. Označme MI počet všech lokálních minim a MA počet všech lokálních maxim (na celém definičním oboru této funkce). Pak platí:

(A) $MI = 0 \wedge MA = 0$ (B) $MI = 1 \wedge MA = 0$ (C) $MI = 0 \wedge MA = 1$
(D) $MI = 1 \wedge MA = 1$ (E) žádný z uvedených výroků není pravdivý

5. Je dána funkce $y = \dfrac{x}{\ln x}$. Označme s počet všech stacionárních bodů a i počet všech inflexních bodů dané funkce. Potom hodnota výrazu $s + i$ je:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) není žádná z uvedených.

6. Která dvojice z následujících funkcí $f_1 : y = (x+1)^2$, $f_2 : y = 2e^x$, $f_3 : y = \ln(x+2)$ a $f_4 : y = -\dfrac{1}{x+1}$ jsou funkce na intervalu $(-1, 1)$ konvexní?

(A) f_1, f_2 (B) f_2, f_3 (C) f_2, f_4 (D) f_3, f_4 (E) žádná z uvedených dvojic

7. Najděte maximální otevřený interval, na němž je funkce $y = e^{\frac{1}{x^2+1}}$ klesající.

(A) $(-\infty, 1)$ (B) $(-\infty, 0)$ (C) $(0, +\infty)$ (D) $(1, +\infty)$
(E) žádný z uvedených intervalů

Řešení: 2C 3D 5B 6A 7C