

Nerovnosti

Cauchyho–Schwartzova–Buňakovského nerovnost

Nechť X_1, X_2 jsou náhodné veličiny. Jestliže existují jejich střední hodnoty a rozptyly, pak

$$|C(X_1, X_2)| \leq \sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}, \text{ tj. } |R(X_1, X_2)| \leq 1$$

Markovova nerovnost

Jestliže je $P(X > 0) = 1$ a $E(X)$ existuje, pak pro všechna $\varepsilon > 0$ platí

$$P(X > \varepsilon E(X)) \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

1. Nechť X je nezáporná náhodná veličina, $E(X) = \delta$.

(a) Jestliže rozložení náhodné veličiny X neznáme, odhadněte $P(X > 3\delta)$ [$\leq 1/3$]

(b) Jestliže $X \sim Ex(1/\delta)$, vypočtěte $P(X > 3\delta)$ [0, 04979]

2. Střední hodnota počtu slunečných dnů během roku v jisté oblasti je 90. Odhadněte pravděpodobnost toho, že v této oblasti bude během roku maximálně 240 slunečných dnů. [≥ 0.625]

Čebyševova nerovnost

Jestliže existují $E(X)$ a $D(X)$, pak pro každé $t > 0$ platí:

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{D(X)}{t^2}$$

3. Nechť X je nezáporná náhodná veličina se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 .

(a) Když neznáte její rozložení, odhadněte pravděpodobnost $P(|X - \mu| > 3\sigma)$. [$\leq 1/9$]

(b) Má-li X normální rozdělení, tedy $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, vypočtěte pravděpodobnost $P(|X - \mu| > 3\sigma)$. [0.0027]

4. Zásilka obsahuje 3000 výrobků určitého typu. Je známo, že pravděpodobnost zhotovení vadného výrobku tohoto typu je 0,04.

(a) Odhadněte pravděpodobnost, že absolutní odchylka podílu vadných výrobků v zásilce a pravděpodobnosti vyrobení vadného výrobku bude menší než 1%. [$\geq 0,872$]

(b) Jak se změní výsledek, jestliže pravděpodobnost vyrobení zmetku bude 0,004 a jestliže zásilka bude obsahovat 30000 výrobků? [$\geq 0,9987$]

5. Odhadněte pravděpodobnost s jakou bude počet šestek, které padnou na ideální kostce v 1000 nezávislých hodech, ležet v mezích od 147 do 186. [$\geq 0,6528$]

Pokud se příklad počítá pomocí Moivre–Laplaceovy věty (níže), tak vyjde $P(147 < X < 186) = 0,904$

Zákon velkých čísel a centrální limitní věty

Konvergence náhodných veličin

Nechť X_1, X_2, \dots je posloupnost náhodných veličin s distribučními funkcemi $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots$ a X náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. Nechť jsou všechny tyto veličiny definovány na téže pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) . Řekneme, že posloupnost X_1, X_2, \dots **konverguje** k X

(a) **jistě**, právě když pro všechna $\omega \in \Omega$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

(b) **podle pravděpodobnosti**, právě když pro všechna $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

(c) **v distribuci (podle rozložení)**, právě když pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

v každém bodě spojitosti funkce $F(x)$.

Slabý zákon velkých čísel

Čebyševova věta: Nechť X_1, X_2, \dots jsou nekorelované náhodné veličiny jejichž střední hodnoty splňují vztah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu$$

a rozptyly jsou shora ohraničené tímž číslem δ . Pak posloupnost aritmetických průměrů

$$\left\{ X_1, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 X_i, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \dots \right\}$$

konverguje podle pravděpodobnosti k číslu μ .

Bernoulliho věta: Nechť je dána náhodná veličina $Y_n \sim Bi(n, \theta)$, pak posloupnost relativních četností

$$\left\{ Y_1, \frac{Y_2}{2}, \dots, \frac{Y_n}{n}, \dots \right\}$$

konverguje podle pravděpodobnosti k parametru θ .

Centrální limitní věta a její důsledky

Lindebergova–Lévyova centrální limitní věta: Nechť X_1, X_2, \dots je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin se stejným rozložením, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, \dots$. Pak posloupnost standardizovaných součtů

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

konverguje v distribuci ke standardizované normální náhodné veličině.

6. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že doba potřebná k objevení a odstranění poruchy

stroje – náhodná veličina X_i – má střední hodnotu $E(X_i) = 40$ minut a rozptyl $D(X_i) = 900$ minut. Jakou dobu si vyžádá objevení a odstranění 100 poruch, jestliže žádáme, aby tato hodnota nebyla s pravděpodobností 0,95 překročena? [74,89 h]

7. Je známo, že rozložení IQ v populaci je normální se střední hodnotou 100 bodů a směrodatnou odchylkou 15 bodů. Jedinec, který má IQ nad 130 bodů, je označen jako vysoce inteligentní.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že z populace náhodně vybereme vysoce inteligentního jedince? [0.02275]

(b) Jestliže nezávisle na sobě vybereme 10 jedinců z populace, jaká bude pravděpodobnost, že alespoň jeden z nich bude vysoce inteligentní? [0.2056]

Moivre–Laplaceova věta: Nechť Y_1, Y_2, \dots je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin, $Y_n \sim Bi(n, \theta)$, $n = 1, 2, \dots$. Pak posloupnost standardizovaných náhodných veličin

$$\left\{ \frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n \cdot \theta(1 - \theta)}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

konverguje v distribuci ke standardizované náhodné veličině $U \sim N(0, 1)$.

Pozn.: Aproximace se považuje za vyhovující, jsou-li splněny podmínky

$$n\theta(1 - \theta) > 9 \quad \text{a} \quad \frac{1}{n+1} < \theta < \frac{n}{n+1}$$

8. Pravděpodobnost narození chlapce je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 10000 novorozenci bude

a) více děvčat než chlapců; [0,00135]

b) chlapců od 5000 do 5300; [0,9973]

c) relativní četnost chlapců v mezích od 0,515 do 0,517 [0,15542]

9. Víme, že v jisté oblasti je 80 % domácností vybaveno videem. Vylosujeme 900 domácností. Jaký bude s pravděpodobností 0.95 počet vybraných domácností, které vlastní video? [739]

Poissonova věta: Nechť Y_1, Y_2, \dots je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin, $Y_n \sim Bi(n, \theta_n)$, $n = 1, 2, \dots$ a nechť platí $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = \lambda$. Pak posloupnost Y_1, Y_2, \dots konverguje v distribuci k náhodné veličině $Y \sim Po(\lambda)$, tj. pro všechna $y = 0, 1, 2, \dots$ platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq y) = \sum_{t=0}^y \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}$$

Pozn.: Aproximace se považuje za vyhovující, jsou-li splněny podmínky $n \geq 30$ a $\theta \leq 0, 1$.

10. Je-li v populaci 1 % leváků, jaká je pravděpodobnost, že mezi 200 vybranými lidmi budou právě 4 leváci, resp. alespoň 4 leváci? [0.0902, 0.1429]

11. Během zkoušky spolehlivosti se výrobek porouchá s pravděpodobností $\theta = 0.05$. Jaká je pravděpodobnost, že při zkoušení 100 výrobků se jich porouchá alespoň 5. [0,55951]