Základní algebraické struktury

Binární operace:

Binární operací rozumíme zobrazení celého kartézského součinu $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ do $\mathbb{M}$ (tj. např. $\circ : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{M}$)

$$(a, b) \to a \circ b$$

Grupoid:

Množina s binární operací.

Asociativita:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{M}; \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

Komutativita:

$$\forall a, b \in \mathbb{M}; \quad a \circ b = b \circ a$$

Pologrupa

Grupoid s asociativní binární operací.

Neutrální prvek (jednotka, nula, nulový prvek):

$\exists\, e \in \mathbb{M}$; $\forall a \in \mathbb{M}$;

- $e \circ a = a$, levý;
- $a \circ e = a$, pravý;

Pokud je pravým i levý neutrálním prvkem zároveň.

Inverzní prvek:

- $a^{-1} \in \mathbb{M}$; $a^{-1} \circ a = e$, levá inverze;
- $a^{-1} \in \mathbb{M}$; $a \circ a^{-1} = e$, pravá inverze;

Pokud je pravou i levou inverzí zároveň.

Monoid: $(\mathbb{M}, \circ)$

Pologrupa s neutrálním prvkem.

Grupa: $(\mathbb{G}, \circ)$

Pologrupa s jednotkou, ve které má **každý** prvek inverzi.

Komutativní grupa/pologrupa:

Grupa/pologrupa, kde je operace $\circ$ komutativní. Nazývá se také **abelovská** grupa.

Podgrupa:

Neprázdná podmnožina struktury uzavřená vůčí zúžení operace $\circ$, která je grupa.

1. Rozhodněte, zda daný grupoid je pologrupa, zda obsahuje (levý, pravý) neutrální prvek, (levý, pravý) inverzní prvek.
   (a) celá čísla s operací sčítání $(\mathbb{Z}, +)$;
   (b) reálná čísla s operací násobení $(\mathbb{R}, \cdot)$;
   (c) celá čísla s operací odečítání $(\mathbb{Z}, -)$;
   (d) přirozená čísla s operací největší společný dělitel $(D(a, b))$.
2. Pro dané množiny matic typu 2×2 nad reálnými čísly rozhodněte, zda je sčítání/násobení matic operací na této množině. Pokud ano, určete typ struktury.

(a) Množina všech matic nad celými čísly.

(b) Množina všech matic nad racionálními čísly.

(c) Množina všech regulárních matic nad racionálními čísly.

(d) Množina všech matic s nulou v levém dolním rohu a jedničkami na diagonále.

(e) Množina všech regulárních matic nad celými čísly.

3. Pro množinu $\mathbb{X}$ značíme $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ množinu všech podmnožin množiny $\mathbb{X}$ (tzv. potenční množina). pro následující operace určete o jakou strukturu se jedná:

   (a) průnik;

   (b) sjednocení;

   (c) množinový rozdíl ($Y - Z = \{x \in Y; x \notin Z\}$);

   (d) symetrický rozdíl ($Y \div Z = (Y - Z) \cup (Z - Y)$).

4. Rozhodněte, zda daný grupoid $(\mathbb{G}, \circ)$ je grupa.

   (a) $\mathbb{G}$ je množina nenulových racionálních čísel a operace $\circ$ je dána předpisem

   $$x \circ y = |x \cdot y|;$$

   (b) $\mathbb{G} = \langle 0; 1)$ a operace $\circ$ je dána předpisem

   $$x \circ y = x + y - [x + y],$$

   kde $[z]$ značí celou část z čísla z, tj. největší celé číslo menší nebo rovno z;

   (c) $\mathbb{G}$ je množina celých čísel a operace $\circ$ je dána předpisem

   $$x \circ y = x + (-1)^x y;$$

   (d) $\mathbb{G}$ je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, přičemž první z nich je nenulové a operace $\circ$ je dána předpisem

   $$(x, y) \circ (u, v) = (xu, xv + y).$$

5. Určete, zda operace na tříprvkové množine $\{a, b, c\}$ dané tabulkou (Cayleyho) je komutativní, asociativní a zda má neutrální prvek.

$\circ$	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	a
c	a	a	a

$\circ$	a	b	c
a	b	a	a
b	a	b	c
c	a	c	a

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

6. Doplňte následující tabulku operace na tříprvkové množině tak, aby výsledný grupoid byl pologrupou:

$\circ$	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			