Podgrupy

Neprázdná podmnožina grupy $(\mathbb{G}, \circ)$, která je uzavřená vůčí zúžení operace $\circ$, a která je také grupa, se nazývá **podgrupa** grupy $(\mathbb{G}, \circ)$.

Řád prvku a v grupě $(\mathbb{G}, \circ)$ – nejmenší přirozené číslo k s vlastností $a^k = e$, kde $a^k = \underbrace{a \circ a \circ \cdots \circ a}_{k}$.

Cyklická grupa – grupa $(\mathbb{G}, \circ)$ je generována nějakým svým prvkem a, tj.

$$\forall x \in \mathbb{G};\ x = a^l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

- $(\mathbb{H}, \circ)$ je podgrupa grupy $(\mathbb{G}, \circ)$ $\Leftrightarrow$
    - $\emptyset \neq \mathbb{H} \subseteq \mathbb{G}$
    - $\forall x, y \in \mathbb{H};\ x \circ y^{-1} \in \mathbb{H}$
- Je-li $(\mathbb{G}, \circ)$ cyklická grupa řádu m generovaná prvkem a, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ takové, že $D(m, k) = 1$, je také a^k generátor grupy $(\mathbb{G}, \circ)$.
- Je-li $(\mathbb{G}, \circ)$ cyklická grupa řádu m generovaná prvkem a, $m = d \cdot n$, pak grupa generovaná prvkem a^d je podgrupa grupy $(\mathbb{G}, \circ)$ řádu n.

1. Určete všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Určete všechny podgrupy grupy $(\mathbb{Z}_{30}, +)$, nakreslete Hasseův diagram.
3. Určete všechny konečné podgrupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.
4. Dokažte, že množina
    (a) $\mathbb{H} = \{a + bi \in \mathbb{C};\ a^2 + b^2 = 1\}$ tvoří podgrupu grupy $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;
    (b) $\mathbb{H} = \{a \in \mathbb{R}^*;\ a^2 \in \mathbb{Q}\}$ tvoří podgrupu grupy $(\mathbb{R}^*, \cdot)$;
    (c) $\mathbb{H} = \{a \in \mathbb{R};\ a^2 \in \mathbb{Q}\}$ netvoří podgrupu grupy $(\mathbb{R}, +)$.
5. Určete řády všech prvků v grupě:
    (a) $(\mathbb{Z}_8^\times, \cdot)$
    (b) $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$
6. Určete všechny generátory grupy $(\mathbb{Z}_{12}, +)$
7. Dokažte, že Kleinova čtyřgrupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ není cyklická. Popište tuto grupu.
8. Popište podgrupu $(\mathbb{S}_4, \circ)$ generovanou množinou $\mathbb{M} = \{(1, 2), (1, 2) \circ (3, 4)\}$

Homomorfismus
Zobrazení zachovávající operaci

$$f : (\mathbb{G}, \cdot) \to (\mathbb{H}, \circ); \forall a, b \in \mathbb{G};\ f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$$

- **Jádro** $\mathrm{Ker} f = \{a \in \mathbb{G}; f(a) = e_H\}$
- **Obraz** $\mathrm{Im} f = \{f(a); a \in \mathbb{G}\}$
- **Izomorfismus** – bijektivní homomorfismus; $\mathbb{G} \cong \mathbb{H}$

9. Dokažte, že grupy $(\mathbb{Z}_{14}^{\times}, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_7^{*}, \cdot)$ jsou izomorfní.

10. Rozhodněte, zda je dané zobrazení homomorfismus nebo dokonce izomorfismus:

$$f : (\mathbb{Z}_{15}^{*}, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{15}^{*}, \cdot);\; f([a]_{\mathbb{Z}_{15}^{*}}) = [4a]_{\mathbb{Z}_{15}^{*}}$$

11. U daného předpisu rozhodněte, zda zadává zobrazení. Pokud ano, zda se jedná o homomorfismus či dokonce izomorfismus grup.

    (a) $f : (\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_3, +) \to (\mathbb{Z}_{12}, +);\; f([a]_4, [b]_3) = [a-b]_{12}$

    (b) $f : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^{\times}, \cdot);\; f([a]_6) = [2]_7^{a}$