Polynomy

- $\mathbb{K}$ je obor integrity. Výraz
$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x^i$$
se nazývá **polynom**, $a_i \in \mathbb{K}$ pro $i = 0, 1, \ldots, k$ jsou **koeficienty polynomu**.
- **Stupeň polynomu** je k, pokud $a_k \neq 0$, píšeme st $f(x) = k$.
$f(x) = 0$ nemá stupeň, nenulové prvky v $\mathbb{K}$ jsou polynomy stupně 0.
- Množinu všech polynomů nad $\mathbb{K}$ značíme $\mathbb{K}[x]$. Struktura $(K[x], +, \cdot)$ je obor integrity.
- Prvek $c \in \mathbb{K}$ je **kořen** polynomu $f(x) \Leftrightarrow f(c) = 0 \in \mathbb{K}$, tj. $f(x) = (x - c) \cdot g(x)$.
- Prvek $c \in \mathbb{K}$ je k**-násobný kořen** polynomu $f(x) \Leftrightarrow f(x) = (x-c)^k \cdot g(x),\ g(c) \neq 0$.
- Pokud má polynom $f(x)$ vícenásobný kořen, pak polynom $h(x)$, takový, že $f(x) = h(x) \cdot g(x)$, kde $g(x)$ je NSD $f(x)$ a $f'(x)$, má stejné kořeny jako $f(x)$, ale pouze jednoduché.
- $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ je **nerozložitelný = ireducibilní** pokud
  - je nenulový a není jednotkou, tj. st $f(x) \geq 1$;
  - je dělitelný pouze jednotkami, tj. polynomy stupně 0, a polynomy, které jsou s ním asociované (tzn. polynomy $g(x) \in \mathbb{K}[x]$ takovými, že $f(x)|g(x) \wedge g(x)|f(x)$), tj. $f(x), g(x)$ se liší o nenulový násobek prvku pole).

Eisensteinovo kritérium ireducibility:
Je dán polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Pokud existuje prvočíslo p tak, že

- $p|a_0, \ldots, p|a_{n-1}, p \nmid a_n$
- $p^2 \nmid a_0$

pak je $f(x)$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}$.
Gaussovo lemma: Pokud je polynom ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, pak je ireducibilní i nad $\mathbb{Q}$.

Nechť $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ je kořenem polynomu $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, pak $p|a_0$, $q|a_n$, $p - q \mid f(1)$, $p + q|f(-1)$.

1. Uveďte polynom 5. stupně nad $\mathbb{Z}$, který je ireducibilní.
2. V $\mathbb{C}$ najděte všechny kořeny polynomu $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ ležícího v $\mathbb{Q}[x]$, jestliže víte, že má vícenásobný kořen.
3. Určete kořeny polynomu $x^5 + 3x^3 + x - 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$.
4. Rozložte polynom $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 2x - 3$ na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, když víte, že jedním jeho kořenem je $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.