Pravděpodobnost

Ω – **základní prostor**, množina všech výsledků

$\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ – **možné výsledky**, prvky množiny Ω

A – **náhodný jev**, $A \subseteq \Omega$

A^c – **jev opačný**, $A^c = \Omega \backslash A$

ω_i – **elementární jev**

Ω – **jev jistý**

$\emptyset$ – **jev nemožný**

$A \cap B = \emptyset$ – **jevy neslučitelné**

$A \subseteq B$ – jev B je **důsledkem** jevu A

$\mathcal{A}$ – **jevové pole**, systém podmnožin množiny Ω, která splňuje podmínky:

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak je i $A \backslash B \in \mathcal{A}$,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak i $A \cup B \in \mathcal{A}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ – **měřitelný prostor**

1. Určitý výrobek je podroben třem různým zkouškám. Označme následující jevy
   A – náhodně vybraný výrobek obstojí při první zkoušce
   B – obstojí ve druhé
   C – obstojí ve třetí

   Vyjádřete v množinové symbolice, že výrobek obstojí

   (a) jen v první zkoušce
   (b) v první a druhé zkoušce, ale neobstojí ve třetí zkoušce
   (c) ve všech třech zkouškách
   (d) alespoň v jedné zkoušce
   (e) právě v jedné zkoušce
   (f) maximálně dvakrát

2. Uveďte alespoň dvě různá jevová pole na $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Pravděpodobnost

Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. **Pravděpodobnost** je zobrazení $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

(a) $P(A) \geq 0$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) jestliže $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou **po dvou disjunktní** množiny, pak

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá **pravděpodobnostní prostor**.

Klasická pravděpodobnost

Nechť základní prostor Ω je konečná neprázdná množina a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je systémem všech podmnožin základního prostoru. Označme $m(\Omega)$ počet všech možných výsledků a pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$ označme $m(A)$ počet možných výsledků příznivých jevu A. Pak reálnou funkci $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ definovanou pro všechna $A \in \mathcal{A}$ vztahem

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1}$$

nazveme **klasická pravděpodobnost.**

3. Házíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že při
   (a) jednom hodu padne číslo 6;
   (b) dvou hodech nepadne ani jednou 6;
   (c) dvou hodech padnou 2 šestky;
   (d) dvou hodech padne jedna šestka;
   (e) jednom hodu padne sudé číslo;
   (f) dvou hodech padne alespoň jednou sudé číslo.

4. Jaká je pravděpodobnost, že při jednom hodu třemi kostkami bude součet bodů 11 a jaká je pravděpodobnost, že to bude 12? (*Tzv. Méréův paradox.*)

Podmíněná a úplná pravděpodobnost

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $H \in \mathcal{A}$ jev s nenulovou pravděpodobností. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ definujeme **podmíňenou pravděpodobnost** vzorcem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} \tag{2}$$

5. Jaká je pravděpodobnost, že na dvou kostkách padnou dvě pětky, ja-li známo, že součet ok je dělitelný pěti?

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a nechť je dán rozklad $\{H_i\,;\, i \in I\}$ základního prostoru Ω na nejvýše spočetně mnoho neslučitelných jevů H_i s vlastností $P(H_i) > 0$ (tzv. apriorní pravděpodobnosti) a $P(\bigcup_{i\in I} H_i) = 1$. Říkáme, že je dán **úplný systém hypotéz**. Potom platí:

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \tag{3}$$

6. Ve studijní skupině je 23 posluchačů. Pravděpodobnost složeni zkoušky z MB104 je pro 8 posluchačů 0,9, pro 12 posluchačů 0,6 a pro 3 posluchače 0,4. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený student zkoušku složí?

7. Potřebu smrkových sazenic kryje lesní závod produkcí dvou školek. První školka kryje 75 % výsadby, přičemž ze 100 sazenic je 80 první jakosti. Druhá školka kryje výsadbu z 25 % přičemž na 100 sazenic je 60 první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná sazenice je první jakosti?

Bayesův vzorec

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a nechť je dán rozklad $\{H_i\,;\, i \in I\}$ základního prostoru Ω na nejvýše spočetně mnoho neslučitelných jevů H_i s vlastností $P(H_i) > 0$ a $P(\bigcup_{i\in I} H_i) = 1$. Pak pro $P(A) > 0$ a pro libovolný jev $B \in \mathcal{A}$ dostáváme:

(a) **Bayesův vzorec**

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum\limits_{i\in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} \tag{4}$$

(b) **Bayesův vzorec**

$$P(B|A) = \frac{\sum\limits_{i\in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i) \cdot P(B|A \cap H_i)}{\sum\limits_{i\in I} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} \tag{5}$$

8. Zadání z předchozího příkladu. Vybrali jsme sazenici, která byla první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že byla z první/druhé školky?

9. Přístroj najde vadu v materiálu s pravděpodobností 0,999, s pravděpodobností 0,0001 chybně označí materiál bez vady za vadný. Je známo, že vada materiálu se vyskytuje s pravděpodobností 0,001. Přístroj označil materiál jako vadný, jaká je pravdepodobnost, že má skutečně vadu?

Geometrická pravděpodobnost

Nechť Ω je borelovská množina v $\mathbb{R}^n$ s kladnou a konečnou Lebesgueovou mírou, $\mathcal{A}$ nechť je systém všech borelovských podmnožin množiny Ω a $\mu(A)$ nechť značí Lebesgueovu míru množiny A. Potom množinovou funkci P_G definovanou pro každé $A \in \mathcal{A}$ vztahem $P_G(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ budeme nazývat **geometrickou pravděpodobností**.

10. Úsečka dlouhá 200 mm je náhodně rozdělena na 3 díly. Určete pravděpodobnost, že prostřední díl bude nejvýše 10 mm dlouhý.

11. Každý ze dvou parníků může doplout do přístaviště vždy jednou za den, a to se stejnou šancí v kterýkoli jeho okamžik a nezávisle na druhém parníku. První se v přístavišti zdrží jednu hodinu a druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že jeden bude muset čekat až druhý opustí přístaviště?