Náhodný vektor

Náhodný vektor je uspořádaná n-tice $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots X_n)'$, kde X_i jsou náhodné veličiny na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Jeho distribuční funkci definujeme vztahem:

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1 \wedge X_2 \leq x_2 \wedge \cdots \wedge X_n \leq x_n).$$

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je neklesající, zprava spojitá vzhledem ke každé jednotlivé proměnné a dále

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}; \lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}; \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_{i-1} \to \infty \\ x_{i+1} \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_i(x_i).$$

$F_i(x_i)$ se nazývá **marginální distribuční funkce** náhodné veličiny X_i a $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se nazývá **simultánní (sdružená) distribuční funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

Diskrétní náhodný vektor

Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots X_n)'$ se nazývá diskrétní, právě když existuje funkce $\pi(x_1, \ldots, x_n)$, která je kladná na nejvýše spočetné množině $N \subseteq \mathbb{R}^n$, nulová na množině $\mathbb{R}^n - N$, je normovaná

$$\sum_{x1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=-\infty}^{\infty} \pi(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

a platí pro ni:

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{t \leq x_1} \cdots \sum_{t \leq x_n} \pi(t_1, \ldots, t_n).$$

Funkce $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá **pravděpodobnostní funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. Dále platí:

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n; \pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1 \wedge X_2 = x_2 \wedge \ldots, X_n = x_n).$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}; \sum_{x_1 \in \mathbb{R}} \cdots \sum_{x_{i-1} \in \mathbb{R}} \sum_{x_{i+1} \in \mathbb{R}} \cdots \sum_{x_n \in \mathbb{R}} \pi(x_1, \ldots, x_n) = \pi_i(x_i)$$

$\pi_i(x_i)$ se nazývá **marginální pravděpodobnostní funkce** náhodné veličiny X_i a $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se nazývá **simultánní (sdružená) pravděpodobnostní funkce** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

1. Nechť náhodný vektor $(X,Y)'$ má pravděpodobnostní funkci

$$\pi(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{15}(x+y+1) & \text{pro } x=0,1,2;\ y=0,1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Určete marginální pravděpodobnostní funkce, marginální distribuční funkce a sdruženou distribuční funkci.

> **Spojitý náhodný vektor**
> Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)'$ se nazývá spojitý, právě když existuje po částech spojitá funkce $f(x_1,\dots,x_n)$ s vlastností
>
> $$\forall (x_1,\dots,x_n)' \in \mathbb{R}^n; f(x_1,\dots,x_n) \geq 0,$$
>
> která je normovaná
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n) = 1$$
>
> a platí pro ni:
>
> $$\forall (x_1,\dots,x_n)' \in \mathbb{R}^n; F(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n.$$
>
> Funkce $f(x_1,\dots,x_n)$ se nazývá **hustota pravděpodobnosti** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$. Dále platí:
>
> $$f(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^n F(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$
>
> ve všech bodech spojitosti funkce $f(x_1,\dots,x_n)$.
>
> $$\forall i \in \{1,\dots,n\}; \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\,\mathrm{d}x_{i+1} \dots \mathrm{d}x_n = f_i(x_i)$$
>
> $f_i(x_i)$ se nazývá **marginální hustota** náhodné veličiny X_i a $f(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ se nazývá **simultánní (sdružená) hustota** náhodného vektoru $\boldsymbol{X}$.

2. Hustota pravděpodobností náhodného vektoru $(X,Y)'$ je dána

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}) & 0<x<2, 0<y<3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Určete obě marginální hustoty, sdruženou distribuční funkci a pravděpodobnost
$P(0 < X \leq 1 \wedge 2 < Y \leq 3)$.

3. Určete marginální distribuční funkci, sdruženou a marginální hustotu náhodného vektoru $(X,Y)'$, když víte, že

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x<0 \wedge y<0 \\ \frac{1}{4}x^2y^2 & x \in \langle 0,1\rangle,\ y \in \langle 0,2\rangle \\ 1 & x>1 \wedge y>2. \end{cases}$$

Stochasticky nezávislé náhodné veličiny

Věta: Náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé, právě když pro každé $x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ platí:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$$

resp. $\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi_1(x_1) \cdot \dots \cdot \pi_n(x_n)$ (v diskrétním případě), resp. $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$ (ve spojitém případě).

4. Spojitý náhodný vektor (X_1, X_2) má hustotu

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 24x_1^2 x_2(1-x_1) & \text{pro } 0 \le x_1 < 1, 0 \le x_2 < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Dokažte, že náhodné veličiny X_1 a X_2 jsou stochasticky nezávislé.

5. Podnik vyrábí ocelové objímky. Kontrola na výstupu třídí výrobky podle dvou kritérií – podle odchylky od předepsaného vnitřního průměru do čtyř skupin ($X = 1, 2, 3, 4$) a podle odchylky od předepsané délky také do čtyř skupin ($Y = 2, 4, 6, 8$). Sdružená pravděpodobnostní funkce je dána tabulkou:

$X \backslash Y$	2	4	6	8
1	0.01	0.03	0.04	0.02
2	0.02	0.24	0.10	0.04
3	0.04	0.15	0.08	0.03
4	0.04	0.06	0.08	0,02

Určete marginální pravděpodobnostní funkce $\pi_X(x), \pi_Y(y)$, podmíněné pravděpobosnostní funkce $\pi(x|Y = 8), \pi(y|X = 1)$, hodnoty sdružené distribuční funkce $F(3, 4), F(1, 3)$, hodnotu podmíněné distribuční funkce $F(X = 3|Y = 8)$. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?

Číselné charakteristiky náhodných vektorů

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ je náhodný vektor. Reálný vektor

$$E(\boldsymbol{X}) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))'$$

se nazývá **vektor středních hodnot**, reálná čtvercová symetrická matice

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} D(X_1) & C(X_1, X_2) & \dots & C(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(X_n, X_1) & C(X_n, X_2) & \dots & D(X_n) \end{pmatrix}$$

se nazývá **varianční matice** a reálná čtvercová symetrická matice

$$\mathrm{cor}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & R(X_1, X_2) & \dots & R(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(X_n, X_1) & R(X_n, X_2) & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se nazývá **korelační matice**.

6. Spojitý náhodný vektor (X, Y) má hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete všechny charakteristiky náhodného vektoru.

7. Je dán náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ se sdruženou pravděpodobnostní funkcí:

$$\pi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \frac{x_1+x_2+1}{15} & x_1 = 0,1,2;\ x_2 = 0,1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete všechny charakteristiky.