Transformace náhodné veličiny

Borelovská funkce: Zobrazení $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazýváme **borelovskou funkcí**, právě když úplný vzor každé borelovské množiny je opět borelovská množina, tj.

$$\forall B \in \mathcal{B}^m; \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)) \in B\} \in \mathcal{B}^n$$

Pozn.: Jedná se zejména o funkce spojité.

Z dané náhodné veličiny $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vytvoříme pomocí borelovské funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zobrazení $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, dané takto:

$$\forall \omega \in \Omega; Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

Toto zobrazení je opět náhodná veličina a nazývá se **transformovaná** náhodná veličina.

Náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x)$ a pravděpodobnostní funkci $\pi(x)$ nebo hustotu $f(x)$. Náhodná veličina $Y = g(X)$ má distribuční funkci $F_*(y)$ a pravdepodobnostní funkci $\pi_*(y)$ nebo hustotu $f_*(y)$. Označíme τ inverzní funkci k funkci g, pak platí:

1. X je diskrétní náhodná veličina

$$\pi_*(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X = \tau(y)) = \pi(\tau(y))$$

2. X je spojitá náhodná veličina, g je rostoucí funkce a nechť existuje její derivace τ

$$F_*(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq \tau(y)) = F(\tau(y))$$
$$f_*(y) = \frac{\mathrm{d}F_*(y)}{\mathrm{d}y} = f(\tau(y))\frac{\mathrm{d}\tau(y)}{\mathrm{d}y}$$

3. X je spojitá náhodná veličina, g je klesající funkce a nechť existuje její derivace τ

$$F_*(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq \tau(y)) = 1 - P(X \leq \tau(y)) = 1 - F(\tau(y))$$
$$f_*(y) = \frac{\mathrm{d}F_*(y)}{\mathrm{d}y} = -f(\tau(y))\frac{\mathrm{d}\tau(y)}{\mathrm{d}y}$$

Celkem pro spojitou náhodnou veličinu X platí:

$$f_*(y) = \frac{\mathrm{d}F_*(y)}{\mathrm{d}y} = f(\tau(y))\left|\frac{\mathrm{d}\tau(y)}{\mathrm{d}y}\right|$$

1. Náhodná veličina X má normální rozdělení, tedy $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, provedem transformaci $Y = a + bX$, kde $b \neq 0$. Určete $f_*(y)$.

2. Předpokládejme, že hodnota IQ je normálně rozložená se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 10, tedy $X \sim N(100, 10^2)$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má IQ:
   (a) v rozmezí 90 až 110;
   (b) vyšší jak 135;
   (c) nižší jak 80.

3. Čekáme na autobus v horské vesnici. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že zpoždění odjezdu autobusu ze zastávky se přibližně řídí normálním rozdělením se střední hodnotou 10 min

a rozptylem $25\,\mathrm{min}^2$. Spočtěte:

(a) pravděpodobnost, že autobus bude mít zpoždění více než $20\,\mathrm{min}$;

(b) pravděpodobnost, že autobus odjede dříve;

(c) pravděpodobnost, že autobus odjede o 0 až $2{,}5\,\mathrm{min}$ dříve;

4. Čas potřebný na vypracování testu ze statistiky má normální rozložení se střední hodnotou 40 minut a směrodatnou odchylkou 12 minut. Kolik procent studentů dokončí test do 45 minut? Kolik času by bylo potřeba, aby test mohlo dokončit 90 % studentů?

5. Náhodná veličina Y je funkcí náhodné veličiny X (tedy $Y = g(X)$). Určete, čemu se rovná hustota pravděpodobnosti $f_*(y)$ jestliže platí:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\mathrm{e}^{-x^2} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases} \quad ; \qquad Y = X^2$$

6. Hledáme pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y, jestliže platí:

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda} & \text{pro } x = 0, 1, \ldots \; \lambda > 0 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases} \quad ; \qquad Y = 4X$$