Matematika IV – demonstrační cvičení

Michal Bulant

19. května 2010

1. demonstrační cvičení

Příklad 1. *Rozhodněte o uvedených množinách a operacích, jakou tvoří strukturu (grupoid, pologrupa, monoid, grupa), příp. diskutujte existenci jednostranných neutrálních prvků.*

1. $(2^{\mathbb{N}}, \cup)$, $(2^{\mathbb{N}}, \cap)$, $(2^{\mathbb{N}}, \setminus)$, $2^{\mathbb{N}}$ *s operací symetrický rozdíl*
2. $\mathbb{N}$ *s operací největší společný dělitel (resp. nejmenší spol. násobek)*
3. *regulární matice* 2×2 *nad* $\mathbb{R}$ *s operací sčítání*
4. *matice* 2×2 *nad* $\mathbb{R}$ *s operací sčítání*
5. *matice* 2×2 *nad* $\mathbb{R}$ *s operací odčítání*
6. *invertibilní matice* 2×2 *nad* $\mathbb{Z}_2$ *s operací násobení matic (zde navíc určete tzv. Cayleyho tabulku násobení)*
7. $(\mathbb{Z}_9, +)$, *resp.* $(\mathbb{Z}_5, +)$, $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$, *resp.* $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_9 \setminus \{[0]_9\}, \cdot)$, *resp.* $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]_5\}, \cdot)$.
8. $\mathbb{Z}$ *s operací* $\circ$ *zadanou (pomocí běžných operací sčítání a násobení) předpisem* $x \circ y = x + (-1)^x y$.

2. demonstrační cvičení

Příklad 2. *Určete největší společný dělitel čísel 10175 a 2277. Pro tato čísla určete koeficienty v Bezoutově rovnosti.*

Příklad 3. *Určete všechna* $n \in \mathbb{N}$ *taková, že* $\varphi(n) = 6$.

Příklad 4. *Určete všechna* $n \in \mathbb{N}$ *taková, že* $\varphi(n) = \frac{n}{2}$.

Příklad 5. *Nalezněte zbytek po dělení čísla* $13^{12} + 12^{11} + 11^{10}$ *číslem* 9.

Příklad 6. *Dokažte, že je číslo* $16^{15} + 29^{14} + 42^{13}$ *dělitelné třinácti.*

Příklad 7. *Určete poslední cifru čísla* $13^{11^{9^{7}}}$

Příklad 8. *Nalezněte nejmenší přirozené číslo n takové, že* $17n \equiv 1 \pmod{181}$

Příklad 9. *Nechť jsou dány permutace*

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 1 & 9 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1. *Rozložte permutace* s, t *na součin nezávislých cyklů.*
2. *Rozložte permutace* s, t *na součin transpozic.*
3. *Určete* s^{-1}
4. *Určete* $s \circ t, t \circ s$
5. *Spočítejte* s^{20}
6. *Určete* $(s^{120} \circ t^{-3})^{17}$

Příklad 10. *Určete grupu symetrií rovnostranného trojúhelníka.*

3. demonstrační cvičení

Příklad 11. *Doplňte následující tabulku operace $*$ na množině $\{a,b,c\}$ tak, aby se jednalo o pologrupu.*

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

Příklad 12 (zákony o krácení)**.**

1. *Dokažte, že v libovolné grupě platí tzv. zákony o krácení.*

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c, \quad a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b.$$

2. *Dokažte, že konečná pologrupa, ve které platí zákony o krácení, je nutně grupou.*

3. *Udejte příklad nekonečné pologrupy, v níž platí zákony o krácení a není grupou.*

4. *Udejte příklad tříprvkového grupoidu, v němž platí zákony o krácení, ale není grupou.*

Příklad 13. *Doplňte následující tabulky operace $*$ na množině $\{a,b,c\}$ tak, aby se jednalo o grupu.*

$*$	a	b	c
a			
b		a	
c			a

$*$	a	b	c
a			
b	c	a	
c			

Příklad 14. *Dokažte, že* $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ *je podgrupa grupy* $(\mathbb{Q}, \cdot)$.

Příklad 15.

1. *Popište všechny podgrupy grupy* $(\mathbb{Z}_{14}, +)$.
2. *Popište všechny podgrupy grupy* $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Příklad 16. *Popište svaz podgrup* Σ_3.

Příklad 17.

1. *Určete podgrupu* Σ_8 *generovanou množinou*

$$\{(4,5,2,1)\circ(4,6,3,1,5,2),(4,5,2,1)\circ(4,5,6)\circ(2,1,3)\}.$$

2. *Určete podgrupu* Σ_n *generovanou množinou*

$$\{(1,2),(1,2,3,\dots,n)\}.$$

4. demonstrační cvičení

Příklad 18. *V grupě* $(C^*, \cdot)$ *určete podgrupu generovanou prvkem* $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Příklad 19. *Určete všechny homomorfismy z* $(\Sigma_3, \circ)$ *do* $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Příklad 20. *Dokažte, že* $(\mathbb{Z}_7^\times, \cdot)$ *je izomorfní s* $(\mathbb{Z}_6, +)$ *a* $(\mathbb{Z}_8^\times, \cdot)$ *s* $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ *a příslušný izomorfismus popište.*

Příklad 21. *Popište nějaký izomorfismus* $(\mathbb{Z}_4, +) \times (\mathbb{Z}_5, +)$ *a* $(\mathbb{Z}_{20}, +)$.

Příklad 22. *U následujících předpisů rozhodněte, zda se jedná o zobrazení, homomorfismus, či dokonce izomorfismus grup. V případě homomorfismů určete jejich jádro.*

1. $f : (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +); \qquad f([a], [b]) = [a + b].$
2. $g : (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +); \qquad g([a], [b]) = [5a + 2b].$
3. $h : (\mathbb{Z}_4, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot); \qquad h([a]) = i^a.$
4. $k : (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot); \qquad h([a]) = i^a.$
5. $l : (\Sigma_6, \circ) \to (\Sigma_6, \circ); \qquad l(s) = s^2.$
6. $m : (\Sigma_6, \circ) \to (\Sigma_6, \circ); \qquad m(s) = (1, 2) \circ s \circ (1, 2).$

Příklad 23. *Nechť* G *je grupa. Dokažte, že zobrazení* $f : G \to G$ *definované předpisem* $f(x) = x^{-1}$ *je izomorfismus právě tehdy, je-li* G *komutativní.*

Příklad 24. *Popište levý rozklad grupy* $(\mathbb{C}, +)$ *podle podgrupy* $(\mathbb{R}, +)$.

Příklad 25. *Kolik tříd obsahuje levý rozklad grupy* $(\Sigma_7, \circ)$ *podle podgrupy* $\langle (1,2) \circ (3,4,5,6,7) \rangle$*?*

5. demonstrační cvičení

Příklad 26. *Dokažte, že daná množina H je normální podgrupa grupy G. Určete příslušnou faktorgrupu G/H.*

1. $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}$.
2. $G = \mathbb{C}^\times$, $H = \mathbb{R}^+$.
3. $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $H = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 6|2m - n\}$.
4. $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$,
   $H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}$
5. $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Q}^\times, b \in \mathbb{Q}\right\}$, $H = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, a, c > 0\right\}$.

Příklad 27. *Dokažte, že daná množina H netvoří normální podgrupu grupy G.*

1. $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$,
   $H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax, a \in \mathbb{R}^\times\}$.
2. $G = \mathbb{S}_4$, $H = \{\pi \in \mathbb{S}_4 \mid \pi(3) = 3\}$

Příklad 28.

1. *Určete zbytek po dělení čísla* 5^{6^7} *a čísla* $7^{123456789}$ *číslem* 12.
2. *Určete poslední dvě cifry čísla* 17^{444}.

6. demonstrační cvičení

Příklad 29. *Nalezněte nejprve všechny racionální a poté násobné kořeny polynomu*

$$4x^7 + 17x^6 + 32x^5 + 39x^4 + 28x^3 + 13x^2 + 2x \in \mathbb{Z}[x].$$

Tento polynom rozložte na součin ireducibilních polynomů postupně nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

Příklad 30. *Určete násobnost kořene -1 polynomu*

$$x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{C}[x]$$

v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 31. *Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen* $-\frac{1}{3}$ *a dvojnásobný kořen* $3 + 2i$ *nalezněte ten, jehož stupeň je nejmenší a rozložte jej na ireducibilní polynomy nad* $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$.

Příklad 32. *Dokažte, že polynom*

$$x^3 + 3x^2 + 5x + 5$$

je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$

- *pomocí Eisensteinova kritéria,*
- *jinak.*

Příklad 33. *1. Dokažte, že polynom*

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$.

2. Důkaz zobecněte pro nekonečně mnoho polynomů.

Příklad 34. *Nalezněte rozklad polynomu*

$$x^4 + 4x^3 + x^2 + 5$$

na součin ireducibilních polynomů nad $\mathbb{Z}$.

7. demonstrační cvičení

Příklad 35. *Nalezněte všechny ireducibilní polynomy*

1. *stupně nejvýše 4 nad* $\mathbb{Z}_2$.
2. *stupně nejvýše 2 nad* $\mathbb{Z}_3$, *dále určete počet ireducibilních polynomů stupně 3 nad* $\mathbb{Z}_3$.

Příklad 36. *Polynom*

$$x^8 + x^4 + x^3 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$$

rozložte na součin ireducibilních polynomů.

Příklad 37. *Rozložte polynom*

$$x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x + 2$$

nad $\mathbb{Z}_3$ *na součin ireducibilních polynomů.*

Příklad 38. *Rozhodněte, ve kterém případě jde o okruh (s obvyklým sčítáním a násobením) s jedničkou:*

a) *přirozená čísla,*

b) *celá čísla, která jsou násobkem 3,*

c) *polynomy nad* $\mathbb{R}$ *stupně nejvýše* n*,*

d) *polynomy s celočíselnými koeficienty,*

e) *polynomy s celočíselnými koeficienty s nulovým absolutním členem,*

f) *polynomy* f *nad* $\mathbb{R}$ *splňující* $f(2) = 0$*,*

g) *nesingulární matice* 2×2 *nad* $\mathbb{R}$*,*

h) *lineární reálné funkce, tj. funkce tvaru* $f(x) = a \cdot x + b, a, b \in \mathbb{R}$.

Příklad 39. *Nechť* $(R, +, \cdot)$ *je okruh. Pak rovněž* $(R, +, \circ)$*, kde*

$$a \circ b = a \cdot b + b \cdot a$$

je okruh. Dokažte nebo vyvraťte.

Příklad 40. *Určete jednotky a dělitele nuly v okruzích:*

a) *celých čísel* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$,

b) *celočíselných polynomů* $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$,

c) *reálných polynomů* $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$,

d) *zbytkových tříd* $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$,

e) *polynomů nad* $\mathbb{Z}_5$*, tj.* $(\mathbb{Z}_5[x], +, \cdot)$,

f) *funkcí* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Příklad 41. *Určete, zda je okruh* $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ *oborem integrity a rozhodněte, zda je izomorfní s okruhem* $(Z_6, +, \cdot)$.

Příklad 42. *Rozhodněte, zda je zobrazení* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *definované předpisem* $f(a + b\,\mathrm{i}) = a + b$ *homomorfismem okruhů.*

Příklad 43. 1. *Uvažme zobrazení* $f : \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ *definované předpisem* $f(a+bi) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. *Rozhodněte (a zdůvodněte), je-li* f *homomorfismus okruhu* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *do okruhu* $(\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *matic typu 2x2 nad* $\mathbb{R}$.

2. *Uvažme zobrazení* $g : \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ *definované předpisem* $g\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = ad - bc$. *Rozhodněte (a zdůvodněte), je-li* g *homomorfismus okruhu* $(\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q}), +, \cdot)$ *matic typu 2x2 nad* $\mathbb{Q}$ *do okruhu* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Příklad 44. *Buď* $\mathbb{Q}[x]$ *okruh polynomů s racionálními koeficienty a* $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q})$ *okruh matic typu 2x2 s racionálními prvky. Uvažte zobrazení:* $\varphi : \mathbb{Q}[x] \to \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q})$ *definované předpisem*

$$\varphi : f(x) \mapsto \begin{pmatrix} f(1) & \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)) \\ 0 & f(-1) \end{pmatrix}$$

a rozhodněte, je-li φ *homomorfismus okruhů. Pokud ano, určete jeho jádro* $\ker \varphi$.

8. demonstrační cvičení

Příklad 45. 1. *Určete všechna možná jevová pole na základním prostoru* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

2. *Určete alespoň tři různá jevová pole na* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Příklad 46. *Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Jev A znamená, že padne liché číslo, jev B, padne-li prvočíslo.*

a) *Určete základní prostor Ω.*

b) *Uveďte všechny možné výsledky příznivé nastoupení jevů A, B.*

c) *Pomocí A, B a operací s jevy vyjádřete:*

- *padne sudé číslo,*
- *padne číslo 2,*
- *padne číslo 2 nebo 3*

d) *Určete nejmenší měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{A})$, obsahující jevy A i B.*

Příklad 47. *Nechť* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ *a* $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$. *Určete všechny pravděpodobnostní funkce zobrazující* $\mathcal{A}$ *do množiny* $\{0, 1, \theta, 1 - \theta\}$.

Příklad 48. *a) Z urny, v níž je a bílých a b černých koulí, vybereme postupně (bez vracení) dvě koule. Jaká je pravděpodobnost. že druhá koule je bílá, za předpokladu, že první byla bílá.*

b) Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Určete pravděpodobnost, že:

- *třetí je zmetek za podmínky, že první 2 byly kvalitní.*
- *první 2 jsou kvalitní a třetí zmetek.*

Příklad 49. *Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě do terče. Pravděpodobnosti zásahu jsou postupně 0,4 , 0,5 a 0,7.Jaká je pravděpodobnost, že zasáhne terč*

a) *právě jednou,*

b) *aspoň jednou?*

Příklad 50. *Nechť* $A_1, \ldots, A_n$ *jsou stochasticky nezávislé náhodné jevy,* $P(A_i) = p_i$ *pro* $i = 1, \ldots, n$*. Vyjádřete pravděpodobnost, že*

a) nastane aspoň jeden z uvedených jevů,

b) nastanou všechny uvedené jevy,

c) nastane právě jeden z uvedených jevů.

Příklad 51. *Dva střelci vystřelí nezávisle na sobě do téhož terče každý jednu ránu. Po střelbě byl v teči nalezen 1 zásah. Určete pravděpodobnost, že zásah patří 1. střelci, pokud tento trefuje terče s pravděpodobností 0,8, zatímco druhý střelec s pravděpodobností 0,4.*

[Odpověď: 6/7]

Příklad 52. *V testu jsou u každé otázky 4 možné odpovědi. Pokud student nezná odpověď, tak hádá (uhodne s pravděpodobností* $\frac{1}{4}$*). Dobrý student zná 75% odpovědí, slabý 30%. Jestliže byla určitá otázka zodpovězena správně, určete pravděpodobnost, že student jen hádal, jde-li o:*

- *dobrého studenta,*
- *špatného studenta,*
- *náhodného studenta, kdy navíc víme, že dobrých studentů jsou 2/3.*

[Odpověď: 1/13;7/19;1/7]

Příklad 53. *Jaká je pravděpodobnost, že dvě náhodně zvolená čísla z intervalu* $(0,1)$ *budou mít součet menší než 1 a součin větší než* $2/9$*?*

[Odpověď: $1/6 - 2/9 \cdot \ln 2 \approx 0{,}126$*.]*

9. demonstrační cvičení

Příklad 54. *Osoby X a Y přijdou na smluvené místo kdykoliv mezi 9.00 a 10.00 (okamžiky příchodu jsou nezávislé a stejně možné během celého intervalu). Určete pravděpodobnost, že:*

1. *první z příchozích nebude muset na druhého čekat déle než 10 minut,*
2. *osoba Y přijde až jako druhá, jestliže přijde po 9.30.*

[*Odpověď:* $1 - (5/6)^2$; $(3/8)/(1/2)$]

Příklad 55. *V lese tvaru trojúhelníka s vrcholy v bodech* $(-1,0),(1,0)$ *a* $(0,\sqrt{3})$ *se ztratilo dítě. Pravděpodobnost výskytu dítěte v určité části lesa je úměrná velikosti této části, nikoliv umístění této části. Určete*

1. *rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa,*
2. *rozdělení vzdálenosti dítěte od nejbližší strany lesa.*

[Odpověď: a) $P(R \leq r) = \frac{2}{\sqrt{3}}r - \frac{r^2}{3}$ *(pro* $r \leq \sqrt{3}$*). b)* $P(R \leq r) = 2\sqrt{3}r - 3r^2$ *pro* $r \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$*.]*

Příklad 56 (Buffonova úloha)**.** *Rovina je rozdělena rovnoběžkami umístěnými rovnoměrně ve vzdálenosti d. Do roviny je náhodně umístěna jehla délky $l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku.*

[Odpověď: $2l/\pi d$]

Příklad 57 (Hra na dlouhé jarní večery)**.** *Při hodu mincí (**P**anna, **O**rel) opakovaném 3krát, máme 8 možných jevů, každý se stejnou pravděpodobností* $\frac{1}{8}$*:*

$$PPP, PPO, POP, POO, OPP, OPO, OOP, OOO.$$

Hru hrají 2 hráči – každý si vybere jednu trojici, pak házeme mincí tak dlouho, až se jedna z těchto trojic objeví. Dotyčný hráč vyhrává.

[Odpověď: Lze ukázat, že existuje pro druhého hráče strategie výběru tak, že má vždy pravděpodobnost výhry alespoň 2/3. Pokud 1. hráč vybral trojici, začínající xx, já vyberu yxx. Pokud 1. hráč vybral trojici, začínající xy, já vyberu xxy.]

Příklad 58. *Třikrát nezávisle na sobě hodíme mincí. Náhodná veličina X udává počet hlav, které padnou při těchto hodech. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X.*

Příklad 59. *Předpokládejme, že X má diskrétní rozdělení takové, že*

$$P(X = k) = c \cdot k^2 \quad \textit{pro} \quad k = 1, 2, 3$$

a $P(X = k) = 0$ jinak. Určete

1. *hodnotu c,*
2. *$P(X \geq 2)$,*
3. *$P(X \in \{1, 3\})$.*

Příklad 60. *Nechť má* X *binomické rozdělení s parametry* $n = 4, p = 2/3$. *Určete rozdělení transformované náhodné veličiny* $Y = (X-2)^2$ *a nakreslete graf její distribuční funkce.*

Příklad 61. *Náhodná veličina X má distribuční funkci*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ c \cdot x^2 & \text{pro } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

Jaké hodnoty může nabývat konstanta c?

Příklad 62. *Pravděpodobnost, že výrobek bude vyhovovat všem technickým požadavkům, je* 0,9. *Popište rozdělení náhodné veličiny udávající počet nevyhovujících výrobků mezi 3 výrobky.*

Příklad 63. *Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou hustotami (mimo vymezený interval je vždy funkce nulová, c je vhodná konstanta – v případě, že jde o hustotu, tuto konstantu určete):*

1. cx *pro* $x \in (0, 1)$,
2. cx *pro* $x \in (-1, 2)$,
3. $cx \sin x$ *pro* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
4. ce^x *pro* $x \in (0, \infty)$,
5. ce^{-x} *pro* $x \in (0, \infty)$,
6. $\frac{c}{1+x^2}$.

Příklad 64. *Náhodná veličina X má distribuční funkci*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -5 \\ \frac{x+5}{7} & \text{pro } -5 \leq x < 2 \\ 1 & \text{pro } x \geq 2. \end{cases}$$

Určete:

1. *hustotu pravděpodobnosti* $f(x)$,
2. $P(-2 < X < 2)$,
3. $P(X = 2)$,
4. $P(-6 < X < 1)$.

10. demonstrační cvičení

Příklad 65. *V zásilce s 10 výrobky je 8 kvalitních (z nich je 5 první jakosti a 3 jsou druhé jakosti) a 2 zmetky. Ze zásilky vybereme bez vracení 2 výrobky. Náhodná veličina* X *nechť značí počet vybraných kvalitních výrobků a* Y *počet vybraných výrobků první jakosti. Určete sdruženou i marginální pravděpodobností funkci a rozhodněte, zda jsou náhodné veličiny* X *a* Y *stochasticky nezávislé.*

Příklad 66. *Spojitý náhodný vektor* (X, Y, Z) *má hustotu* $k \cdot xyz$ *pro* $0 < x, y < 1, 0 < z < 3$ *a jinak rovnou nule. Určete konstantu* k *a vypočtěte*

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{3} < Y < \frac{2}{3}, 1 < Z < 2\right).$$

Příklad 67. *Spojitý náhodný vektor* (X, Y) *má hustotu* $(x, y) = 24x^2y(1-x)$ *pro* $0 \leq x, y < 1$ *a jinde nulovou. Dokažte, že* X *a* Y *jsou stochasticky nezávislé.*

Příklad 68. *Určete pravděpodobnost, že náhodná veličina* $X \sim N(20, 16)$ *nabude hodnoty:*

- *menší než 16,*
- *větší než 20,*
- *v mezích od 12 do 28,*
- *menší než 12 nebo větší než 28?*

Příklad 69. *Na výrobcích měříme dělku s přesností* $\pm 0{,}5mm$ *a šířku s přesností* $\pm 0{,}2mm$. *Náhodná veličina* X *udává chybu při měření délky a* Y *chybu při měření šířky. Předpokládejme, že simultánní hustota pravděpodobnosti* $\varphi(x, y)$ *je uvnitř mezí chyb konstantní (a jinde samozřejmě nulová). Určete*

1. *tuto konstantu,*
2. *obě marginální hustoty pravděpodobnosti,*
3. *simultánní distribuční funkci,*
4. *obě marginální distribuční funkce,*
5. $P(-0{,}1 < X < 0{,}1)$,
6. *zda jsou* X *a* Y *stochasticky nezávislé.*

Příklad 70. *Mějme náhodnou veličinu* X *hustoty* $f(x) = 2xe^{-x^2}$ *pro* $x > 0$ *(a jinde nulové). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny* $Y = X^2$.

11. demonstrační cvičení

Příklad 71. *Náhodná veličina* X *má na intervalu* $(0, a)$ *konstantní hustotu pravděpodobnosti (a jinde nulovou). S využitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určete:*

1. *Momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny* X,
2. $E(2X + 3)$,
3. $E(3X^2 - 2X + 1)$,
4. $D(2X + 3)$,
5. $D(X^2 + 1)$.

Příklad 72. *Náhodná veličina* X *má Poissonovo rozdělení (tj. pravděpodobnostní funkci* $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$*). Určete její momentovou vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl.*

Příklad 73. *Diskrétní náhodný vektor* (X_1, X_2) *má simultánní pravděpodobnostní funkci* $\pi(0,-1) = c, \pi(0,0) = \pi(0,1) = \pi(1,-1) = \pi(2,-1) = 0, \pi(1,0) = \pi(0,1) = \pi(2,1) = 2c, \pi(2,0) = 3c$ *a rovnou nule jinde. Určete konstantu* c *a vypočtěte:*

1. *kovarianci* $C(X_1, X_2)$,
2. *korelační koeficient* $R(X_1, X_2)$.

[Odpověď: 1. 0,18; *2.* 0,42.*]*

Příklad 74. *Nechť* X_1, X_2 *stochasticky nezávislé náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením. Určete rozdělení rozdělení transformované náhodné veličiny* $Y = 3 + X_1 - 2X_2$ *a najděte její dolní kvartil.*

[Odpověď: $Y \sim N(3, 5); 1{,}4918.$*]*

Příklad 75. *Buď* (X, Y) *náhodný vektor, který má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu.*

1. *Určete sdruženou hustotu náhodného vektoru* (X, Y).
2. *Dokažte, že* X *a* Y *nejsou stochasticky nezávislé.*
3. *Určete hustotu sdruženého rozdělení transformovaného vektoru* (R, Φ), *kde* R *a* Φ *udávají polární souřadnice vektoru* (X, Y).
4. *Určete marginální hustoty náhodných veličin* R *a* Φ *a odvoďte, že jsou nezávislé (a tedy i nekorelované).*
5. *(volitel.) Určete marginální hustoty náhodných veličin* X *a* Y *a jejich střední hodnoty, rozptyly a kovarianci.*

[Odpověď: Viz 12. přednáška (náhodné vektory, slajd č. 24)]

Příklad 76. *Uvažte náhodné veličiny* $X \sim N(0,1)$ *a* α, *kde* $P(\alpha = 1) = P(\alpha = -1) = 1/2$. *Určete:*

1. *rozdělení náhodné veličiny* αX,
2. *kovarianci* $C(X, \alpha X)$.
3. *Ukažte, že* X *a* αX *nejsou nezávislé.*

Příklad 77. *1. Dokažte Markovovu nerovnost*

$$P[X > \lambda] < \frac{EX}{\lambda}.$$

2. Z Markovovy nerovnosti odvoďte Čebyševovu nerovnost.

12. demonstrační cvičení

Příklad 78. *Mějme nezápornou náhodnou veličinu X se střední hodnotou μ.*

1. *Bez dalších informací o rozdělení X odhadněte $P(X > 3\mu)$.*
2. *Víte-li, že $X \sim \mathrm{Ex}(\frac{1}{\mu})$, vypočtěte $P(X > 3\mu)$.*

Příklad 79. *Určete pravděpodobnost, že při 600 hodech kostkou padne šestka alespoň 75 krát a nejvýše 125 krát*

1. *pomocí Čebyševovy nerovnosti,*
2. *pomocí de Moivre-Laplaceovy věty.*

[Odpověď: 1. aspoň $\frac{10}{75}$*; 2.*0,9937*]*

Příklad 80. *Dokažte, že pro kvantily normovaného normálního rozdělení platí vztah*

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Příklad 81. *Víme, že v jisté oblasti je 80% domácností vybaveno DVD přehrávačem. S pravděpodobností 95% určete*

1. *rozmezí počtu těch domácností z vylosovaných 900 domácností. které vlastní DVD,*
2. *dolní odhad počtu těch domácností z vylosovaných 900 domácností. které vlastní DVD.*

Příklad 82. *Předpokládejme, že velká skupina studentů má ze zápočtové písemky ze statistiky bodové hodnoty normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Určete pravděpodobnost, že*

a) náhodně vybraný student bude mít výsledek lepší než 80 bodů,

b) průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude lepší než 80 bodů.

Příklad 83. *Rychlost letadla byla určována v 5 zkouškách, jejichž aritmetický průměr byl* $m = 870,3\,ms^{-1}$. *Najděte* 95% *interval spolehlivosti pro* μ *víte-li, že měření rychlosti se řídí normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou* $2,1\,ms^{-1}$.

Příklad 84. *Nechť* $X_1, \ldots, X_n$ *je náhodný výběr z rozdělení* $N(\mu; 0{,}04)$*. Jaký musí být nejmenší počet měření, aby šířka intervalu spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu* μ *nepřesáhla* $0{,}16$*, a to na hladině významnosti* $\alpha = 0{,}05$*?*

13. demonstrační cvičení

Příklad 85. *Televizní stanice, která vysílá seriál Vražedná čísla, by ráda věděla, kolik času se průměrný student matematiky vydrží dívat na TV, aby na ně mohla zaměřit případnou reklamní kampaň. Náhodným výběrem 100 studentů zjistila, že týdně sledují TV průměrně 20 hodin s (výběrovou) směrodatnou odchylkou 5 hodin. Za předpokladu, že se počet hodin u TV řídí normálním rozdělením, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu hodin, který matematici stráví před TV obrazovkou.*

[Odpověď: (19,01;20,99)]

Příklad 86. *Pevnost nosníků má normální rozdělení s variabilitou vyjádřenou směrodatnou odchylkou* $\sigma = 120$. *Nová technologie výroby bude akceptována, jestliže zajistí variabilitu nejvýše* 100.

Rozhodněte, zda je možné na základě 16 měření s výběrovou směrodatnou odchylkou rovnou 107,5 s rizikem 0,05 přijmout novou technologii.

Příklad 87. *Spotřeba nového modelu auta byla testována 11 řidiči s výsledky 7,5; 7,8; 6,9; 8,2; 8,0; 7,5; 9,0; 7,6; 8,1; 7,9; 8,3. Rozhodněte, zda je možné se spolehlivostí 0,95 vyvrátit tvrzení výrobce o průměrné spotřebě 7,7 l/100 km.*

Příklad 88. *Hloubka moře se měří přístrojem, jehož systematická chyba je nulová a náhodné chyby měření mají normální rozdělení se směrodatnou odchylkou $\sigma = 1$ m. Určete, kolik měření je třeba provést, aby se hloubka moře určila s chybou nejvýše 1/4 metru při riziku 0,05.*

[Odpověď: 62]

Příklad 89. *Aktivní studenti chtěli dopravnímu podniku dokázat, že autobusy trpí většími výkyvy příjezdových dob na danou zastávku než tramvaje a provedli měření odchylek od jízdního řádu:*

autobus	*0*	*2*	*4*	*-3*	*2*	*-4*	*-3*	*0*	*0*	*5*
tramvaj	*4*	*6*	*3*	*0*	*-2*	*2*	*0*	*1*	*1*	*0*

Z tabulky lze snadno vypočítat, že $S_1^2 = 9{,}12$ *a* $S_2^2 = 5{,}39$.

1. *Na hladině 0,05 testujte nulovou hypotézu, že autobus i tramvaj jsou stejně spolehlivé oproti alternativní hypotéze, že tramvaj je spolehlivější.*
2. *Určete maximální pravděpodobnost s níž můžete tvrdit, že je tramvaj spolehlivější než autobus.*

Příklad 90. *31 pacientů s rakovinou plic, léčených novým lékem, má průměrnou dobu přežití 28 měsíců se směrodatnou odchylkou 4 měsíce. Z předchozích studií je známo, že průměrné přežití pacientů bez podávání nového léku je 26 měsíců.*

1. *Lze na základě těchto dat usoudit, že nový lék prodlužuje dobu přežití?*
2. *Jak se změní závěr, pokud se významně zvětší počet pacientů, resp. rozptyl?*

Příklad 91. *Hmotnost jedné porce kávy považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením* $N(6\text{g}; 1,196\text{g}^2)$*. Určete pravděpodobnost, že k přípravě 16 porcí kávy postačí jeden 100g balíček.*

[Odpověď:

$$P(\sum_{i=1}^{16} X_i \leq 100) = P(\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i \leq \frac{100}{16}) = P(M \leq \frac{100}{16}) = P\left(\frac{M-6}{\sigma/\sqrt{16}} \leq \frac{\frac{100}{16}-6}{\sigma/\sqrt{16}}\right) =$$

$$= P\left(U \leq \frac{1/4}{\sigma/4}\right) = P(U \leq 1/\sigma) = P(U \leq 0,9144) \approx 0,818.$$

]

Příklad 92. *Ve dvou nádržích se zkoumal obsah chlóru. Z první bylo odebráno 22 vzorků, z druhé 10 vzorků. Byly vypočteny následující hodnoty výběrových průměrů a rozptylů:* $M_1 = 34,23$, $M_2 = 35,73$, $S_1^2 = 1,76$, $S_2^2 = 1,81$. *Hodnoty zjištěné z odebraných vzorků považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z rozdělení* $N(\mu_1, \sigma^2)$, *resp.* $N(\mu_2, \sigma^2)$. *Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot* $\mu_1 - \mu_2$ *a vyslovte závěr na dané hladině spolehlivosti o podstatnosti rozdílu naměřených hodnot.*

[Odpověď: Dosadíme do vztahu $M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$ *hodnoty* $M_1 - M_2 = -1,5$, $S_* = 1,3323$ *a dostaneme interval* $(-2,5377; -0,4623)$. *Do tohoto intervalu 0 nepatří, proto je rozdíl* $\mu_1 - \mu_2$ *statisticky významně různý od nuly.]*