5. demonstrační cvičení

MB104 - jaro 2010

Příklad 1. Dokažte, že daná množina H je normální podgrupa grupy G. Určete příslušnou faktorgrupu G/H.

1. $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{R}$.
2. $G = \mathbb{C}^\times$, $H = \mathbb{R}^+$.
3. $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $H = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 6|2m - n\}$.
4. $G = \mathbb{S}_4$, $H = \{(i, j) \circ (k, l)\}$.
5. $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$,
   $H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}$
6. $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Q}^\times, b \in \mathbb{Q} \right\}$, $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, a, c > 0 \right\}$.
7. $G = \mathbb{C}$, $H = \mathbb{Z}$.

Příklad 2. Dokažte, že daná množina H netvoří normální podgrupu grupy G.

1. $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$,
   $H = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax, a \in \mathbb{R}^\times\}$.
2. $G = \mathbb{S}_4$, $H = \{\pi \in \mathbb{S}_4 \mid \pi(3) = 3\}$

Příklad 3. Dokažte, že průnikem dvou normálních podgrup grupy G je opět normální podgrupa grupy G.

Příklad 4.

1. Určete zbytek po dělení čísla 5^{6^7} a čísla $7^{123456789}$ číslem 12.
2. Určete poslední dvě cifry čísla 17^{444}.