MB104 - Matematika IV

Demonstrativní cvičení

20. 2. 2008

Připomenutí. Dělitelnost:

1. Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$. Řekneme, že b dělí a, jestliže existuje $q \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = b \cdot q$.

2. Nechť $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$. Řekneme, že m je společný dělitel čísel a a b, jestliže $m|a$ a zároveň $m|b$. Řekneme, že d je největší společný dělitel čísel a a b, jestliže d je společný dělitel čísel a a b a navíc, je-li m také společný dělitel čísel a a b, potom $m|d$.

3. *Věta o dělení se zbytkem*: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$. Potom existují $q, r \in \mathbb{Z}$ taková, že $a = b \cdot q + r$, kde $0 \leq |r| < b$.

4. *Bezoutova rovnost*: Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$. Potom existují $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $(a, b) = a \cdot x + b \cdot y$.

5. Každé přirozené číslo $n > 1$ můžeme rozložit na součin prvočísel a to jednoznačně, až na pořadí činitelů.

6. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom číslem $\varphi(n)$ označme počet přirozených čísel menších nebo rovných n, která jsou s n nesoudělná. $\varphi(n)$ se nazývá Eulerova funkce.

Příklad 1. Určete největší společný dělitel čísel 10175 a 2277. Pro tato čísla určete koeficienty $x, y \in \mathbb{Z}$ v Bezoutově rovnosti.

Příklad 2. Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $\varphi(n) = 6$.

Příklad 3. Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$ taková, že $\varphi(n) = \frac{n}{2}$.

Připomenutí. Kongruence:

1. Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Řekneme, že a je kongruentní s b modulo m, píšeme $a \equiv b \pmod{m}$, jestliže čísla a a b dávají po dělení číslem m stejný zbytek.
2. Nechť $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:
   (a) $a \equiv b \pmod{m}$
   (b) $a = b + m \cdot q$, pro vhodné $q \in \mathbb{Z}$
   (c) $m | a - b$
3. Kongruence podle téhož modulu můžeme sčítat.
4. Na libovolnou stranu kongruence můžeme přičíst libovolný násobek modulu.
5. Kongruence podle téhož modulu můžeme násobit.
6. Obě strany kongruence můžeme umocnit na totéž přirozené číslo.
7. Obě strany kondruence můžeme vydělit jejich společným dělitelem, je-li tento dělitel **nesoudělný s modulem**.
8. Obě strany kongruence i modul můžeme vynásobit stejným přirozeným číslem.
9. Obě strany kongruence i modul můžeme vydělit jejich společným dělitelem (kladným).

Příklad 4. Nalezněte zbytek po dělení čísla $13^{12} + 12^{11} + 11^{10}$ číslem 9.

Příklad 5. Dokažte, že je číslo $16^{15} + 29^{14} + 42^{13}$ dělitelné číslem 13.

Příklad 6. Určete poslední cifru v dekadickém zápisu čísla $13^{11^{9^7}}$.

Příklad 7. Nalezněte nejmenší přirozené číslo n takové, že $17 \cdot n \equiv 1 \pmod{181}$

Připomenutí. Permutace:

1. Permutací rozumíme bijektivní zobrazení množiny A na množinu A. My budeme za množinu A uvažovat neprázdnou konečnou podmnožinu přirozených čísel.

2. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Množina všech permutací na n prvkové množině tvoří grupu, která je pro $n \geq 3$ nekomutativní. Tato grupa má $n!$ prvků.

3. Libovolnou permutaci můžeme rozložit na součin nazávislých cyklů.

4. Cyklus délky 2 nazýváme transpozice.

5. Každou permutaci můžeme rozložit na součin transpozic. Je-li počet těchto transpozic lichý, řekneme, že je tato permutace lichá, je-li počet transpozic sudý, řekneme, že je permutace sudá.

Příklad 8. Nechť jsou dány permutace
$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 1 & 9 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

1. Rozložte s, t na součin nezávislých cyklů.
2. Rozložte s, t na součin transpozic. Určete paritu obou permutací.
3. Určete s^{-1}.
4. Spočítejte $s \circ t$, $t \circ s$.
5. Spočítejte s^{20}.
6. Spočítejte $(s^{120} \circ t^{-3})^{17}$.

Příklad 9. Určete grupu symetrií rovnostranného trojúhelníka.