Matematika IV – 6. přednáška
Okruhy polynomů, kódování a šifrování

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

29. 3. 2010

Obsah přednášky

1. Kořeny a rozklady polynomů
2. Polynomy více proměnných
3. Úvod do kódování
   - (n, k)–kódy
   - Lineární kódy
4. Pár slov o šifrách

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, **Drsná matematika**, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- R. B. Ash, Abstract algebra, `http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/Algebra.html`.
- Jiří Rosický, *Algebra*, PřF MU, 2002.
- Peter J. Cameron. *Introduction to algebra*, Oxford University Press, 2001, 295 s. (Dostupné v knihovně PřF).
- Alfred J. Menezes, Paul C. van Oorschot and Scott A. Vanstone , *Handbook of Applied Cryptography*, CRC Press, 2001, 780 p., `http://www.cacr.math.uwaterloo.ca/hac/`
- Jan Pasek, *Kódování*, elektronický text, MU – `http://www.math.muni.cz/~paseka/ftp/lectures/kodovani.ps`.

Opakování – dělení polynomů se zbytkem

Základním nástrojem pro diskusi dělitelnosti, společných dělitelů apod. v okruhu celých čísel $\mathbb{Z}$ je procedura dělení se zbytkem a Euklidův algoritmus pro hledání největších společných dělitelů. Tyto postupy nyní zobecníme.

Opakování – dělení polynomů se zbytkem

Základním nástrojem pro diskusi dělitelnosti, společných dělitelů apod. v okruhu celých čísel $\mathbb{Z}$ je procedura dělení se zbytkem a Euklidův algoritmus pro hledání největších společných dělitelů. Tyto postupy nyní zobecníme.

Lemma (Věta o dělení se zbytkem pro polynomy)

Nechť R je komutativní okruh bez dělitelů nuly a $f, g \in R[x]$ polynomy, $g \neq 0$. Pak existuje $a \in R$, $a \neq 0$, a polynomy q a r splňující $af = qg + r$, kde $r = 0$ nebo $\operatorname{st} r < \operatorname{st} g$. Je-li navíc R těleso nebo je aspoň vedoucí koeficient polynomu g roven jedné, potom lze volit $a = 1$ a polynomy q a r jsou v tomto případě určeny jednoznačně.

Opakování – dělení polynomů se zbytkem

Základním nástrojem pro diskusi dělitelnosti, společných dělitelů apod. v okruhu celých čísel $\mathbb{Z}$ je procedura dělení se zbytkem a Euklidův algoritmus pro hledání největších společných dělitelů. Tyto postupy nyní zobecníme.

Lemma (Věta o dělení se zbytkem pro polynomy)

Nechť R je komutativní okruh bez dělitelů nuly a $f, g \in R[x]$ polynomy, $g \neq 0$. Pak existuje $a \in R$, $a \neq 0$, a polynomy q a r splňující $af = qg + r$, kde $r = 0$ nebo $\operatorname{st} r < \operatorname{st} g$. Je-li navíc R těleso nebo je aspoň vedoucí koeficient polynomu g roven jedné, potom lze volit $a = 1$ a polynomy q a r jsou v tomto případě určeny jednoznačně.

Poznámka

Toto tvrzení je možné aplikovat i obecněji (viz *Euklidovské okruhy*), je ale třeba *správně* definovat, jak budeme porovnávat prvky.

Plán přednášky

1. Kořeny a rozklady polynomů
2. Polynomy více proměnných
3. Úvod do kódování
   - (n, k)–kódy
   - Lineární kódy
4. Pár slov o šifrách

Proceduru dělení se zbytkem můžeme okamžitě využít k diskusi kořenů polynomů.

Proceduru dělení se zbytkem můžeme okamžitě využít k diskusi kořenů polynomů.
Uvažme polynom $f(x) \in R[x]$, st $f > 0$, a dělme jej polynomem $x - b$, $b \in R$.

Proceduru dělení se zbytkem můžeme okamžitě využít k diskusi kořenů polynomů.
Uvažme polynom $f(x) \in R[x]$, $\operatorname{st} f > 0$, a dělme jej polynomem $x - b$, $b \in R$.
Protože je vedoucí koeficient jednička, algoritmus pro dělení dává jednoznačný výsledek. Dostáváme tedy jednoznačně zadané polynomy q a r splňující $f = q(x - b) + r$, kde $r = 0$ nebo $\operatorname{st} r = 0$, tj. $r \in R$. Tzn., že hodnota polynomu f v $b \in R$ je rovna právě $f(b) = r$.

Proceduru dělení se zbytkem můžeme okamžitě využít k diskusi kořenů polynomů.
Uvažme polynom $f(x) \in R[x]$, $\operatorname{st} f > 0$, a dělme jej polynomem $x - b$, $b \in R$.
Protože je vedoucí koeficient jednička, algoritmus pro dělení dává jednoznačný výsledek. Dostáváme tedy jednoznačně zadané polynomy q a r splňující $f = q(x - b) + r$, kde $r = 0$ nebo $\operatorname{st} r = 0$, tj. $r \in R$. Tzn., že hodnota polynomu f v $b \in R$ je rovna právě $f(b) = r$.
Proto je prvek $b \in R$ **kořen polynomu** f právě, když $(x - b)|f$.
Protože po vydělení polynomem stupně jedna vždy klesne stupeň výsledku alespoň o jedničku, dokázali jsme následující tvrzení:

Důsledek

Každý nenulový polynom f nad tělesem R má nejvýše $\operatorname{st} f$ kořenů.

Příklad

Polynom x^3 má nad $\mathbb{Z}_8$ 4 kořeny $([0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8,)$.
Je to tím, že tento okruh není oborem integrity (a tedy ani tělesem).

Důsledkem předchozího tvrzení je následující velmi důležitý fakt.

Důsledek

Libovolná konečná podgrupa multiplikativní grupy $(K^\times, \cdot)$ tělesa $(K, +, \cdot)$ je cyklická. Speciálně existuje prvek $g \in \mathbb{Z}_p^\times$ tak, že jeho mocniny generují celou grupu $\mathbb{Z}_p^\times$.

Platí-li pro $k \geq 1$, že dokonce $(x-b)^k | f$, kde k je největší možné, říkáme, že kořen b je **násobnosti** k.

Dva polynomy nad nekonečným komutativním okruhem, které zadávají stejné zobrazení $R \to R$, mají rozdíl, jehož kořenem je každý prvek v R. Protože rozdíl polynomů má jen konečný stupeň, pokud není nulový, dokázali jsme tak již dříve uvedené tvrzení:

Věta

Jestliže je R nekonečný okruh, pak dva polynomy $f(x)$ a $g(x)$ nad R jsou stejné právě, když jsou stejná příslušná zobrazení f a g.

Polynom h je **největší společný dělitel** dvou polynomů a f a $g \in R[x]$ jestliže:

- $h|f$ a zároveň $h|g$
- jestliže $k|f$ a zároveň $k|g$ pak také $k|h$.

Polynom h je **největší společný dělitel** dvou polynomů a f a $g \in R[x]$ jestliže:

- $h|f$ a zároveň $h|g$
- jestliže $k|f$a zároveň $k|g$ pak také $k|h$.

Věta (Bezoutova rovnost)

Nechť R je těleso a nechť $f, g \in R[x]$. Pak existuje největší společný dělitel h polynomů f a g. Polynom h je určený jednoznačně, až na násobek nenulovým skalárem. Přitom existují polynomy $A, B \in R[x]$ takové, že $h = Af + Bg$.

Polynom h je **největší společný dělitel** dvou polynomů a f a $g \in R[x]$ jestliže:

- $h|f$ a zároveň $h|g$
- jestliže $k|f$a zároveň $k|g$ pak také $k|h$.

Věta (Bezoutova rovnost)

Nechť R je těleso a nechť $f, g \in R[x]$. Pak existuje největší společný dělitel h polynomů f a g. Polynom h je určený jednoznačně, až na násobek nenulovým skalárem. Přitom existují polynomy $A, B \in R[x]$ takové, že $h = Af + Bg$.

Důkaz.

Euklidův algoritmus. □

Důkaz následujícího tvrzení je poměrně technický a nebudeme jej prezentovat v detailech (i když jsme si vše potřebné pro něj již v podstatě připravili).

Věta

Je-li R obor integrity s jednoznačným rozkladem, pak také okruh polynomů $R[x]$ je obor integrity s jednoznačným rozkladem.

Příklad

$\mathbb{Z}[x], \mathbb{Z}_5[x]$ jsou okruhy s jednoznačným rozkladem.

Důsledkem této věty je skutečnost, že každý polynom nad komutativním okruhem s jednoznačným rozkladem můžeme rozložit tak, jak to známe s polynomy s reálnými nebo komplexními koeficienty. Pokud má polynom tolik kořenů, včetně násobnosti, jako je jeho stupeň $\operatorname{st} f = k$, je odpovídající rozklad tvaru

$$f(x) = b \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \dots (x - a_k).$$

Důsledkem této věty je skutečnost, že každý polynom nad komutativním okruhem s jednoznačným rozkladem můžeme rozložit tak, jak to známe s polynomy s reálnými nebo komplexními koeficienty. Pokud má polynom tolik kořenů, včetně násobnosti, jako je jeho stupeň st $f = k$, je odpovídající rozklad tvaru

$$f(x) = b \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \dots (x - a_k).$$

Zatímco reálné polynomy mohou být i úplně bez kořenů, každý komplexní polynom naopak takovýto rozklad připouští. To je obsahem tzv. základní věty algebry:

Věta (Základní věta algebry)

Pole $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené, tj. každý polynom stupně alespoň 1 má kořen.

Hledání kořenů a ireducibilita

Věta (Gaussovo lemma)

Je-li polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, pak je rovněž ireducibilní jakožto polynom nad $\mathbb{Q}$.

Hledání kořenů a ireducibilita

Věta (Gaussovo lemma)

Je-li polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, pak je rovněž ireducibilní jakožto polynom nad $\mathbb{Q}$.

Důsledek

$\sqrt{2}$ *není racionální číslo.*

Hledání kořenů a ireducibilita

Věta (Gaussovo lemma)

Je-li polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, pak je rovněž ireducibilní jakožto polynom nad $\mathbb{Q}$.

Důsledek

$\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Věta

Má-li polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ racionální kořen $r/s \in \mathbb{Q}$ v základním tvaru, pak $r | a_0$ a $s | a_n$.

Hledání kořenů a ireducibilita

Věta (Gaussovo lemma)

Je-li polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, pak je rovněž ireducibilní jakožto polynom nad $\mathbb{Q}$.

Důsledek

$\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Věta

Má-li polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ racionální kořen $r/s \in \mathbb{Q}$ v základním tvaru, pak $r | a_0$ a $s | a_n$.

Příklad

- Dokažte, že $x^3 - 3x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ je ireducibilní.

Hledání kořenů a ireducibilita

Věta (Gaussovo lemma)

Je-li polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, pak je rovněž ireducibilní jakožto polynom nad $\mathbb{Q}$.

Důsledek

$\sqrt{2}$ není racionální číslo.

Věta

Má-li polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ racionální kořen $r/s \in \mathbb{Q}$ v základním tvaru, pak $r | a_0$ a $s | a_n$.

Příklad

- Dokažte, že $x^3 - 3x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ je ireducibilní.
- Dokažte, že $x^3 - 3x - 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ je ireducibilní.

Hledání kořenů a ireducibilita, pokr.

Věta (Eisensteinovo kritérium ireducibility)

Je-li $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, *přičemž:*

- $p \mid a_0, \dots, p_{n-1}, p \nmid a_n$
- $p^2 \nmid a_0$.

Pak je f *ireducibilní nad* $\mathbb{Z}$ *(a tedy i nad* $\mathbb{Q}$*).*

Důsledek

Nad okruhem $\mathbb{Z}$ *existují ireducibilní polynomy libovolného stupně.*

Hledání kořenů a ireducibilita, pokr.

Věta (Eisensteinovo kritérium ireducibility)

Je-li $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$*, přičemž:*

- $p \mid a_0, \ldots, p_{n-1}, p \nmid a_n$
- $p^2 \nmid a_0$.

Pak je f *ireducibilní nad* $\mathbb{Z}$ *(a tedy i nad* $\mathbb{Q}$*).*

Důsledek

Nad okruhem $\mathbb{Z}$ *existují ireducibilní polynomy libovolného stupně.*

Důkaz.

Stačí uvážit $f_n = x^n + 2$, který je podle Eisensteinova kritéria (s $p = 2$) ireducibilní stupně n. $\square$

Poznámka

Užitečná je často také tzv. *lokalizace*, tj. redukce koeficientů modulo zvolené prvočíslo p, příp. posunutí proměnné o konstantu. Např., že polynom $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ je ireducibilní, zjistíme díky redukci, ireducibilitu tzv. kruhového polynomu

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \cdots + x + 1$$

díky substituci $x = y + 1$.

Poznámka

Užitečná je často také tzv. *lokalizace*, tj. redukce koeficientů modulo zvolené prvočíslo p, příp. posunutí proměnné o konstantu. Např., že polynom $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ je ireducibilní, zjistíme díky redukci, ireducibilitu tzv. kruhového polynomu

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \cdots + x + 1$$

díky substituci $x = y + 1$.

Věta

Je-li α kořenem polynomu f nad tělesem násobnosti $k > 1$, je α kořenem f' násobnosti $k - 1$.

Poznámka

Užitečná je často také tzv. *lokalizace*, tj. redukce koeficientů modulo zvolené prvočíslo p, příp. posunutí proměnné o konstantu. Např., že polynom $x^3 + 27x^2 + 5x + 97$ je ireducibilní, zjistíme díky redukci, ireducibilitu tzv. kruhového polynomu

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \cdots + x + 1$$

díky substituci $x = y + 1$.

Věta

Je-li α kořenem polynomu f nad tělesem násobnosti $k > 1$, je α kořenem f' násobnosti $k - 1$.

Důsledek

Násobné kořeny polynomu f jsou právě kořeny (f, f'). Všechny kořeny polynomu f obdržíme jako (jednoduché) kořeny polynomu $f/(f, f')$.

Plán přednášky

1. Kořeny a rozklady polynomů
2. Polynomy více proměnných
3. Úvod do kódování
   - (n, k)–kódy
   - Lineární kódy
4. Pár slov o šifrách

Polynomy více proměnných

Okruhy polynomů v proměnných $x_1, \dots, x_r$ definujeme induktivně vztahem

$$R[x_1, \dots, x_r] := R[x_1, \dots, x_{r-1}][x_r].$$

Např. $R[x, y] = R[x][y]$, tzn. že uvažujeme polynomy v proměnné y nad okruhem $R[x]$. Snadno se ověří, že polynomy v proměnných $x_1, \dots, x_r$ lze chápat jako výrazy vzniklé z písmen $x_1, \dots, x_n$ a prvků okruhu R konečným počtem (formálního) sčítání a násobení v komutativním okruhu.

Polynomy více proměnných

Okruhy polynomů v proměnných $x_1, \dots, x_r$ definujeme induktivně vztahem

$$R[x_1, \dots, x_r] := R[x_1, \dots, x_{r-1}][x_r].$$

Např. $R[x, y] = R[x][y]$, tzn. že uvažujeme polynomy v proměnné y nad okruhem $R[x]$. Snadno se ověří, že polynomy v proměnných $x_1, \dots, x_r$ lze chápat jako výrazy vzniklé z písmen $x_1, \dots, x_n$ a prvků okruhu R konečným počtem (formálního) sčítání a násobení v komutativním okruhu.

Například prvky v $R[x, y]$ jsou tvaru

$$\begin{aligned} f &= a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x) \\ &= (a_{mn}x^m + \dots + a_{0n})y^n + \dots + (b_{p0}x^p + \dots + b_{00}) \\ &= c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + \dots \end{aligned}$$

Jako důsledek naší definice a předchozích výsledků pro polynomy nad obecnými komutativními okruhy dostáváme:

Důsledek

1. *Jestliže v okruhu R nejsou dělitelé nuly, pak také v okruhu polynomů $R[x_1, \dots, x_r]$ nejsou dělitelé nuly.*
2. *Je-li R obor integrity s jednoznačným rozkladem, pak také okruh polynomů $R[x_1, \dots, x_r]$ je obor integrity s jednoznačným rozkladem.*

Příklad

$\mathbb{Z}[x, y]$ je okruh s jednoznačným rozkladem.

Symetrické polynomy

Definice

Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, který se nezmění při libovolné permutaci proměnných $x_1, \dots, x_n$, se nazývá *symetrický polynom*. *Elementárními symetrickými polynomy rozumíme polynomy*

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ &\vdots \\ s_n &= x_1 \cdots x_n \end{aligned}$$

Symetrické polynomy

Definice

Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$, který se nezmění při libovolné permutaci proměnných $x_1, \dots, x_n$, se nazývá *symetrický polynom*. *Elementárními symetrickými polynomy rozumíme polynomy*

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ &\vdots \\ s_n &= x_1 \cdots x_n \end{aligned}$$

Věta

Libovolný symetrický polynom lze vyjádřit jako polynom v proměnných $s_1, \dots, s_n$.

Plán přednášky

1 Kořeny a rozklady polynomů

2 Polynomy více proměnných

3 Úvod do kódování
- (n, k)–kódy
- Lineární kódy

4 Pár slov o šifrách

Kódování

Při přenosu informace zpravidla dochází k její deformaci. Budeme pro jednoduchost pracovat s modelem, kdy jednotlivé částečky informace jsou buď nuly nebo jedničky (tj. prvky v $\mathbb{Z}_2$) a přenášíme slova o k bitech. Obdobné postupy jsou možné i nad ostatními konečnými tělesy.

Kódování

Při přenosu informace zpravidla dochází k její deformaci. Budeme pro jednoduchost pracovat s modelem, kdy jednotlivé částečky informace jsou buď nuly nebo jedničky (tj. prvky v $\mathbb{Z}_2$) a přenášíme slova o k bitech. Obdobné postupy jsou možné i nad ostatními konečnými tělesy.

Přenosové chyby chceme

1. rozpoznávat
2. opravovat

a za tím účelem přidáváme dodatečných $n-k$ bitů informace pro pevně zvolené $n > k$.

Kódování

Při přenosu informace zpravidla dochází k její deformaci. Budeme pro jednoduchost pracovat s modelem, kdy jednotlivé částečky informace jsou buď nuly nebo jedničky (tj. prvky v $\mathbb{Z}_2$) a přenášíme slova o k bitech. Obdobné postupy jsou možné i nad ostatními konečnými tělesy.

Přenosové chyby chceme

1. rozpoznávat
2. opravovat

a za tím účelem přidáváme dodatečných $n-k$ bitů informace pro pevně zvolené $n > k$.

Všech slov o k bitech je 2^k a každé z nich má jednoznačně určovat jedno **kódové slovo** z 2^n možných. Máme tedy ještě

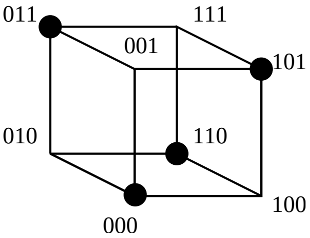
$$2^n - 2^k = 2^k(2^{n-k} - 1)$$

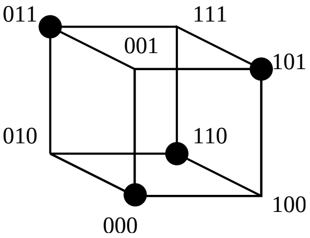
slov, které jsou chybové. Lze tedy tušit, že pro veliké k nám i malý počet přidaných bitů (tj. $n-k$) dává hodně redundantní informace.

Úplně jednoduchým příkladem je **kód kontrolující paritu**. Kódové slovo o $k+1$ bitech je určené tak, aby přidáním prvního bitu byl zaručen sudý počet jedniček ve slově.

Úplně jednoduchým příkladem je **kód kontrolující paritu**. Kódové slovo o $k+1$ bitech je určené tak, aby přidáním prvního bitu byl zaručen sudý počet jedniček ve slově.
Pokud při přenosu dojde k lichému počtu chyb, přijdeme na to.
Dvě různá kódová slova se při tomto kódu vždy liší alespoň ve dvou pozicích, chybové slovo se ale od dvou různých kódových slov liší pouze v pozici jedné. Nemůžeme proto umět chyby opravovat ani kdybychom věděli, že došlo k právě jedné.

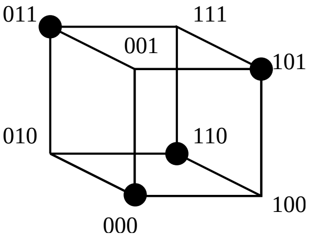
Úplně jednoduchým příkladem je **kód kontrolující paritu**. Kódové slovo o $k+1$ bitech je určené tak, aby přidáním prvního bitu byl zaručen sudý počet jedniček ve slově.
Pokud při přenosu dojde k lichému počtu chyb, přijdeme na to.
Dvě různá kódová slova se při tomto kódu vždy liší alespoň ve dvou pozicích, chybové slovo se ale od dvou různých kódových slov liší pouze v pozici jedné. Nemůžeme proto umět chyby opravovat ani kdybychom věděli, že došlo k právě jedné.
Navíc neumíme detekovat tak obvyklé chyby, jako je záměna dvou sousedních hodnot ve slově.


011
111
001
101
010
110
100
000



Definice

Hammingova vzdálenost dvou slov je rovna počtu bitů, ve kterých se liší.



Definice

Hammingova vzdálenost dvou slov je rovna počtu bitů, ve kterých se liší.

Věta

1. *Kód odhaluje r a méně chyb právě, když je minimální Hammingova vzdálenost kódových slov právě $r+1$.*
2. *Kód opravuje r a méně chyb právě, když je minimální Hammingova vzdálenost kódových slov právě $2r+1$.*

Jak konstruovat kódová slova, abychom je sladno rozpoznali? Kontrolu parity jsme už viděli, další triviální možnost je prosté opakování bitů – např. $(3,1)$–kód bere jednotlivé bity a posílá je třikrát po sobě.

Jak konstruovat kódová slova, abychom je sladno rozpoznali? Kontrolu parity jsme už viděli, další triviální možnost je prosté opakování bitů – např. $(3, 1)$–kód bere jednotlivé bity a posílá je třikrát po sobě.
Systematickou cestou je pak využití dělitelnosti polynomů. Zpráva $b_0 b_1 \dots b_{k-1}$ je reprezentována jako polynom $m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1}$.

Jak konstruovat kódová slova, abychom je sladno rozpoznali? Kontrolu parity jsme už viděli, další triviální možnost je prosté opakování bitů – např. $(3,1)$–kód bere jednotlivé bity a posílá je třikrát po sobě.

Systematickou cestou je pak využití dělitelnosti polynomů. Zpráva $b_0 b_1 \dots b_{k-1}$ je reprezentována jako polynom $m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{k-1} x^{k-1}$.

Definice

Nechť $p(x) = a_0 + \dots + a_{n-k} x^{n-k} \in \mathbb{Z}_2[x]$ je polynom s $a_0 = 1$, $a_{n-k} = 1$. **Polynomiální kód generovaný polynomem** $p(x)$ je (n,k)–kód jehož slova jsou polynomy stupně menšího než n dělitelné $p(x)$.

Jak konstruovat kódová slova, abychom je sladno rozpoznali? Kontrolu parity jsme už viděli, další triviální možnost je prosté opakování bitů – např. $(3,1)$–kód bere jednotlivé bity a posílá je třikrát po sobě.

Systematickou cestou je pak využití dělitelnosti polynomů. Zpráva $b_0 b_1 \dots b_{k-1}$ je reprezentována jako polynom $m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{k-1} x^{k-1}$.

Definice

Nechť $p(x) = a_0 + \cdots + a_{n-k} x^{n-k} \in \mathbb{Z}_2[x]$ je polynom s $a_0 = 1$, $a_{n-k} = 1$. **Polynomiální kód generovaný polynomem** $p(x)$ je (n,k)–kód jehož slova jsou polynomy stupně menšího než n dělitelné $p(x)$.

Zpráva $m(x)$ je zakódována jako $v(x) = r(x) + x^{n-k} m(x)$, kde $r(x)$ je zbytek po dělení polynomu $x^{n-k} m(x)$ polynomem $p(x)$.

Z definice víme

$$v(x) = x^{n-k}m(x) + r(x) = q(x)p(x) + r(x) + r(x) = q(x)p(x).$$

Budou tedy všechna kódová slova dělitelná $p(x)$.

Z definice víme

$$v(x) = x^{n-k}m(x) + r(x) = q(x)p(x) + r(x) + r(x) = q(x)p(x).$$

Budou tedy všechna kódová slova dělitelná $p(x)$.
Původní zpráva je obsažena přímo v polynomu $v(x)$, takže dekódování správného slova je snadné.

Z definice víme

$$v(x) = x^{n-k}m(x) + r(x) = q(x)p(x) + r(x) + r(x) = q(x)p(x).$$

Budou tedy všechna kódová slova dělitelná $p(x)$.
Původní zpráva je obsažena přímo v polynomu $v(x)$, takže dekódování správného slova je snadné.

Příklad

1. Polynom $p(x) = 1 + x$ generuje $(n, n-1)$–kód kontroly parity pro všechna $n \geq 3$.
2. Polynom $p(x) = 1 + x + x^2$ generuje $(3, 1)$–kód opakování bitů.

První tvrzení plyne z toho, že $1 + x$ dělí polynom $v(x)$ tehdy a jen tehdy, když $v(1) = 0$ a to nastane tehdy, když je ve $v(x)$ sudý počet nenulových koeficientů. Druhé je zřejmé.

Přenos slova $v \in (\mathbb{Z}_2)^n$ dopadne příjmem polynomu

$$u(x) = v(x) + e(x)$$

kde $e(x)$ je tzv. **chybový polynom** repzentující vektor chyby přenosu.

Přenos slova $v \in (\mathbb{Z}_2)^n$ dopadne příjmem polynomu

$$u(x) = v(x) + e(x)$$

kde $e(x)$ je tzv. **chybový polynom** repzentující vektor chyby přenosu.
Chyba je rozpoznatelná pouze, když generátor kódu $p(x)$ nedělí $e(x)$. Máme proto zájem o polynomy, které nevystupují jako dělitelé zbytečně často.

Přenos slova $v \in (\mathbb{Z}_2)^n$ dopadne příjmem polynomu

$$u(x) = v(x) + e(x)$$

kde $e(x)$ je tzv. **chybový polynom** repzentující vektor chyby přenosu.
Chyba je rozpoznatelná pouze, když generátor kódu $p(x)$ nedělí $e(x)$. Máme proto zájem o polynomy, které nevystupují jako dělitelé zbytečně často.

Definice

Ireducibilní polynom $p(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ stupně m se nazývá **primitivní**, jestliže $p(x)$ dělí polynom $(x^k - 1)$ pro $k = 2^m - 1$ ale nedělí jej pro žádná menší k.

Věta

Je-li $p(x)$ primitivní polynom stupně m, pak pro všechna $n \leq 2^m - 1$ rozpoznává příslušný $(n, n-m)$–kód všechny jednoduché a dvojité chyby.

Věta

Je-li $p(x)$ primitivní polynom stupně m, pak pro všechna $n \leq 2^m - 1$ rozpoznává příslušný $(n, n-m)$–kód všechny jednoduché a dvojité chyby.

Důsledek

Je-li $q(x)$ primitivní polynom stupně m, pak pro všechna $n \leq 2^m - 1$ rozpoznává $(n, n-m-1)$–kód generovaný polynomem $p(x) = q(x)(1+x)$ všechny dvojité chyby a všechna slova s lichým počtem chyb.

Tabulka dává o informace o výsledcích předchozích dvou vět pro několik polynomů:

Tabulka dává o informace o výsledcích předchozích dvou vět pro několik polynomů:

primitivní polynom	kontrolní bity	délka slova
$1+x+x^2$	2	3
$1+x+x^3$	3	7
$1+x+x^4$	4	15
$1+x^2+x^5$	5	31
$1+x+x^6$	6	63
$1+x^3+x^7$	7	127
$1+x^2+x^3+x^4+x^8$	8	255
$1+x^4+x^9$	9	511
$1+x^3+x^{10}$	10	1023

Definice

Lineární kód je injektivní lineární zobrazení $g : (\mathbb{Z}_2)^k \to (\mathbb{Z}_2)^n$. Matice G typu k/n reprezentující toto zobrazení v standardních bazích se nazývá generující **matice kódu**.

Definice

Lineární kód je injektivní lineární zobrazení $g : (\mathbb{Z}_2)^k \to (\mathbb{Z}_2)^n$. Matice G typu k/n reprezentující toto zobrazení v standardních bazích se nazývá generující **matice kódu**.

Pro každé slovo v je

$$u = G \cdot v$$

příslušné kódové slovo.

Věta

Každý polynomiální (n, k)–kód je lineární kód.

Věta

Každý polynomiální (n, k)–kód je lineární kód.

Matice příslušná k polynomu $p(x) = 1 + x + x^3$ je

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta

Je-li g lineární kódování s maticí

$$G = \begin{pmatrix} P \\ \mathbb{E}_{n-k} \end{pmatrix},$$

potom zobrazení $h : (\mathbb{Z}_2)^n \to (\mathbb{Z}_2)^k$ s maticí

$$H = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{n-k} & P \end{pmatrix}$$

má následující vlastnosti

1. $\mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Im}\, g$, *tj.*
2. *přijaté slovo u je kódové slovo právě, když je $H \cdot u = 0$*

Věta

Je-li g lineární kódování s maticí

$$G = \begin{pmatrix} P \\ \mathbb{E}_{n-k} \end{pmatrix},$$

potom zobrazení $h : (\mathbb{Z}_2)^n \to (\mathbb{Z}_2)^k$ s maticí

$$H = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{n-k} & P \end{pmatrix}$$

má následující vlastnosti

1. $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} g$, *tj.*
2. *přijaté slovo u je kódové slovo právě, když je $H \cdot u = 0$*

Matici H z věty se říká **matice kontroly parity** přílušného (n, k)–kódu.

Samoopravné kódy

Jak jsme viděli, přenos zprávy u dává výsledek

$$v = u + e.$$

To je ale nad $\mathbb{Z}_2$ ekvivalentní $e = u + v$.

Samoopravné kódy

Jak jsme viděli, přenos zprávy u dává výsledek

$$v = u + e.$$

To je ale nad $\mathbb{Z}_2$ ekvivalentní $e = u + v$.
Pokud tedy známe podprostor $V \subset (\mathbb{Z}_2)^n$ správných kódových slov, víme u každého výsledku, že správné slovo (s opravenými případnými chybami) je ve třídě rozkladu $v + V$ v prostoru $(\mathbb{Z}_2)^n / V$.

Samoopravné kódy

Jak jsme viděli, přenos zprávy u dává výsledek

$$v = u + e.$$

To je ale nad $\mathbb{Z}_2$ ekvivalentní $e = u + v$.
Pokud tedy známe podprostor $V \subset (\mathbb{Z}_2)^n$ správných kódových slov, víme u každého výsledku, že správné slovo (s opravenými případnými chybami) je ve třídě rozkladu $v + V$ v prostoru $(\mathbb{Z}_2)^n/V$.
Zobrazení $h : (\mathbb{Z}_2)^n \to (\mathbb{Z}_2)^{n-k}$ má V za jádro, proto indukuje injektivní lineární zobrazení $h : (\mathbb{Z}_2)^n/V \to (\mathbb{Z}_2)^{n-k}$. Jeho hodnoty jsou jednoznačně určeny hodnotami $H \cdot u$.

Definice

Hodnota $H \cdot u$ se nazývá **syndrom** slova u.

Definice

Hodnota $H \cdot u$ se nazývá **syndrom** slova u.

Věta

Dvě slova jsou ve stejné třídě rozkladu právě tehdy, když mají týž syndrom.

Samoopravné kódy lze konstruovat tak, že pro každý syndrom určíme prvek v příslušné třídě, který je nejvhodnějším slovem.

Příklad

Buď dán $(6, 3)$ kód nad $\mathbb{Z}_2$ generovaný polynomem $x^3 + x^2 + 1$.

1. Určete jeho generující matici a matici kontroly parity.
2. Dekódujte zprávu 111101 předpokládáte-li, že při přenosu došlo k nejmenšímu možnému počtu chyb.

Příklad

Buď dán $(6,3)$ kód nad $\mathbb{Z}_2$ generovaný polynomem $x^3 + x^2 + 1$.

1. Určete jeho generující matici a matici kontroly parity.
2. Dekódujte zprávu 111101 předpokládáte-li, že při přenosu došlo k nejmenšímu možnému počtu chyb.

Řešení

Protože se jedná o lineární kód, stačí určit jak se zakódují bázové vektory 1, x a x^2, tedy určit zbytky polynomů x^3, x^4 a x^5 po dělení polynomem $x^3 + x^2 + 1$. Máme

$$\begin{aligned} x^3 &\equiv x^2 + 1 \pmod{x^3 + x^2 + 1} \\ x^4 &= x(x^3) \equiv x(x^2+1) \equiv x^2 + x + 1 \pmod{x^3 + x^2 + 1} \\ x^5 &= x(x^4) \equiv x(x^2+x+1) \equiv x + 1 \pmod{x^3 + x^2 + 1} \end{aligned}$$

Řešení (pokr.)

Bázové vektory (zprávy) 100, 010 a 001 se tedy zakódují do vektorů (kódů) 101100, 111010 a 110001, generující matice, resp. matice kontroly parity kódu jsou tedy

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení (pokr.)

Bázové vektory (zprávy) 100, 010 a 001 se tedy zakódují do vektorů (kódů) 101100, 111010 a 110001, generující matice, resp. matice kontroly parity kódu jsou tedy

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vynásobíme-li přijatou zprávu 111101 maticí kontroly parity, dostáváme syndrom 100 a víme, že při přenosu došlo k chybě. Sestavme tabulku všech syndromů a jim odpovídajících kódových slov.

Syndrom	Kódová slova s daným syndromem							
000	**000000**	110001	111010	101100	010110	001011	011101	100111
001	**001000**	111001	110010	100100	011110	000011	010101	101111
010	**010000**	100001	101010	111100	000110	011011	001101	110111
100	**100000**	010001	011010	001100	110110	101011	111101	000111
011	**011000**	101001	100010	110100	001110	010011	**000101**	111111
101	101000	011001	010010	**000100**	111110	100011	110101	001111
110	110000	**000001**	001010	011100	100110	111011	101101	010111
111	111000	001001	**000010**	010100	101110	110011	100101	011111

Řešení (dokončení)

Syndrom 000 mají všechna kódová slova. Počínaje druhým řádkem, je každý řádek tabulky afinním prostorem jehož zaměřením je vektorový prostor daný prvním řádkem. Zejména je tedy rozdíl každých dvou slov ve stejném řádku nějakým kódovým slovem. Všechna slova s daným syndromem dostaneme přičtením syndromu (doplněného nulami na délku kódového slova) ke všem kódovým slovům. Tzv. vedoucím reprezentantem třídy (řádku, afinního prostoru) odpovídající danému syndromu je slovo s nejmenším počtem jedniček v řádku, a tedy i nejmenším počtem bitových změn, jež je třeba provést, abychom dostali kódové slovo – v našem případě jde o slovo 100000 a jeho odečtením od obdrženého slova dostaneme platné kódové slovo 011101. Je to platné kódové slovo s nejmenší Hammingovou vzdáleností od obdrženého slova . Odeslaná zpráva tedy byla 101.

Plán přednášky

1. Kořeny a rozklady polynomů
2. Polynomy více proměnných
3. Úvod do kódování
   - (n, k)–kódy
   - Lineární kódy
4. Pár slov o šifrách

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$
- dešifrování šifry C: $OT = D_d(C) \equiv C^d \pmod{n}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$
- dešifrování šifry C: $OT = D_d(C) \equiv C^d \pmod{n}$

RSA

Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman (1977; C. Cocks,GCHQ – 1973)

- každý účastník A potřebuje dvojici klíčů – veřejný V_A a soukromý S_A
- generování klíčů: zvolí dvě velká prvočísla p, q, vypočte $n = pq$, $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ [n je veřejné, ale $\varphi(n)$ nelze snadno spočítat]
- zvolí **veřejný klíč** e a ověří, že $(e, \varphi(n)) = 1$
- např. pomocí Euklidova algoritmu spočítá **tajný klíč** d tak, aby $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- zašifrování numerického *kódu* zprávy M: $C = C_e(M) \equiv M^e \pmod{n}$
- dešifrování šifry C: $OT = D_d(C) \equiv C^d \pmod{n}$

Důkaz.

Fermatova, resp. Eulerova věta. □

Poznámka

- Korektní naprogramování bez postranních kanálů není triviální (viz např. PKCS#1, RFC 3447).
- Analogicky podepisování (hashů) zpráv (viz např. DSA)
- Viz RSA factoring challenge (např. rozklad 212 ciferného čísla RSA-704 vynese 30 000 USD).

Příklad

- **Generování klíče.** Alice vybere prvočísla $p = 2357, q = 2551$, and vypočte $n = p \cdot q = 6012707$ a $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 6007800$. Alice zvolí $e = 3674911$ a pomocí Euklidova algoritmu vypočte $d = 422191$ ($e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$). Soukromý klíč Alice je d, veřejný pak (n, e).

Příklad

- **Generování klíče.** Alice vybere prvočísla $p = 2357, q = 2551$, and vypočte $n = p \cdot q = 6012707$ a $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 6007800$. Alice zvolí $e = 3674911$ a pomocí Euklidova algoritmu vypočte $d = 422191$ ($e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$). Soukromý klíč Alice je d, veřejný pak (n, e).
- Chce-li Bob poslat Alici zprávu $m = 5234673$, pomocí modulárního umocňování vypočte

$$c \equiv m^e \equiv 5234673^{3674911} \equiv 3650502 \pmod{n},$$

a tu odešle Alici.

Příklad

- **Generování klíče.** Alice vybere prvočísla $p = 2357, q = 2551$, and vypočte $n = p \cdot q = 6012707$ a $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 6007800$. Alice zvolí $e = 3674911$ a pomocí Euklidova algoritmu vypočte $d = 422191$ ($e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$). Soukromý klíč Alice je d, veřejný pak (n, e).
- Chce-li Bob poslat Alici zprávu $m = 5234673$, pomocí modulárního umocňování vypočte

$$c \equiv m^e \equiv 5234673^{3674911} \equiv 3650502 \pmod{n},$$

  a tu odešle Alici.
- Alice zprávu dešifruje díky výpočtu

$$c^d \equiv 3650502^{422191} \equiv 5234673.$$

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýru s kufříky, . . .).

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýru s kufříky, …).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýru s kufříky, ...).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýru s kufříky, ...).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a
- Bob vybere náhodné b a pošle g^b

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýru s kufříky, ...).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a
- Bob vybere náhodné b a pošle g^b
- Společným klíčem pro komunikaci je g^{ab}.

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýru s kufříky, ...).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a
- Bob vybere náhodné b a pošle g^b
- Společným klíčem pro komunikaci je g^{ab}.

Diffie-Hellman key exchange, ElGamal

Whitfield Diffie, Martin Hellman (1976; M. Williamson, GCHQ - 1974)
Výměna klíčů pro symetrickou kryptografii bez předchozího kontaktu (tj. náhrada jednorázových klíčů, kurýru s kufříky, ...).

- Dohoda stran na **cyklické grupě** G a jejím generátoru g (veřejné)
- Alice vybere náhodné a a pošle g^a
- Bob vybere náhodné b a pošle g^b
- Společným klíčem pro komunikaci je g^{ab}.

Poznámka

- Problém diskrétního logaritmu (DLP)
- Nezbytná autentizace (*man in the middle attack*)

Z protokolu DH na výměnu klíčů odvozen šifrovací algoritmus ElGamal:

- Alice zvolí cyklickou grupu G spolu s generátorem g
- Alice zvolí **tajný klíč** x, spočítá $h = g^x$ a zveřejní **veřejný klíč** (G, g, h)
- šifrování zprávy M: Bob zvolí náhodné y a vypočte $C_1 = g^y$ a $C_2 = M \cdot h^y$ a pošle (C_1, C_2)
- dešifrování zprávy: $OT = C_2 / C_1^x$

Z protokolu DH na výměnu klíčů odvozen šifrovací algoritmus ElGamal:

- Alice zvolí cyklickou grupu G spolu s generátorem g
- Alice zvolí **tajný klíč** x, spočítá $h = g^x$ a zveřejní **veřejný klíč** (G, g, h)
- šifrování zprávy M: Bob zvolí náhodné y a vypočte $C_1 = g^y$ a $C_2 = M \cdot h^y$ a pošle (C_1, C_2)
- dešifrování zprávy: $OT = C_2 / C_1^x$

Poznámka

Opět lze odvodit podepisování.

Eliptické křivky

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.
Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči. Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .

Eliptické křivky

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.
Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči.
Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .
Protokoly:

- ECDH - přímá varianta DH na eliptické křívce (jen místo generátoru se vybere *vhodný* bod na křivce)
- ECDSA - digitální podpis pomocí eliptických křivek.

Eliptické křivky

Eliptické křivky jsou rovinné křivky o rovnici tvaru $y^2 = x^3 + ax + b$ a zajímavé jsou tím, že na jejich bodech lze definovat operace tak, že výslednou strukturou bude komutativní grupa.
Přitom uvedené operace lze efektivně provádět a navíc se ukazuje, že mají (nejen) pro kryprografii zajímavé vlastnosti – srovnatelné bezpečnosti jako RSA lze dosáhnout již s podstatně kratšími klíči.
Výhodou je rovněž velké množství použitelných eliptických křivek (a tedy grup různé struktury) podle volby parametru a, b .
Protokoly:

- ECDH - přímá varianta DH na eliptické křívce (jen místo generátoru se vybere *vhodný* bod na křivce)
- ECDSA - digitální podpis pomocí eliptických křivek.

Poznámka

Problém diskrétního logaritmu (ECDLP).
Navíc se ukazuje, že eliptické křivky jsou velmi dobře použitelné při faktorizaci prvočísel.