Matematika 4 $\boxed{\textbf{A}}$
26. května 2010 (UČO:)

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**. Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 bod: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Každá faktorgrupa dané komutativní grupy je nutně komutativní.

(b) **ano — ne** Neexistuje žádný surjektivní homomorfismus $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_6, +)$.

(c) **ano — ne** Okruh polynomů nad tělesem je oborem integrity.

(d) **ano — ne** Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padl součet dělitelný 4, víme-li, že součet byl dělitelný 2, je menší než 1/2.

(e) **ano — ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že se zvyšováním požadované spolehlivosti $1-\alpha$ se zvětšuje i interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

(f) **ano — ne** Je-li střední hodnota náhodné veličiny X rovna 1, pak je i střední hodnota náhodné veličiny X^2 rovna 1 (bez ohledu na rozdělení X).

Příklady:

1. (6 bodů) [zbierka, s.179/14] Předpokládáme, že přidáním speciálních přípravků je možné snížit tvrdost vody. Náhodným výběrem 40 vzorků vody byla zjištěna průměrná tvrdost 4,0. Po přidání přípravku pak byla změřena na 50 vzorcích průměrná tvrdost 3,8. Na hladině významnosti 5% testujte nulovou hypotézu oproti předpokládané jednostranné alternativě za předpokladu, že oba výběry pocházejí z normálního rozdělení s rozptylem 0,25. Svůj závěr explicitně zformulujte.

2. (6 bodů) [zbierka, s.63/22] Diskrétní náhodný vektor má pravděpodobnostní funkci uvedenou v tabulce:

a) Určete marginální pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y a rozhodněte jsou-li nezávislé. Načrtněte graf distribuční funkce X.

b) Určete střední hodnotu a rozptyl veličin X a Y.

c) Určete konstantu c tak, aby byly veličiny $X + c \cdot Y$ a Y nekorelované.

X \ Y	1	2
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$

3. (6 bodů) Uvažte okruh $(\mathbb{Z}_{29}, +, \cdot)$ zbytkových tříd modulo 29.

a) Rozhodněte, zda jde o obor integrity.

b) Určete všechny jednotky (=invertibilní prvky) tohoto okruhu a jejich počet.

c) Rozhodněte, zda je grupa jednotek tohoto okruhu cyklická. Pokud ano, určete některý její generátor.

Vše zdůvodněte.

4. (6 bodů) Určete všechny kořeny (včetně násobnosti) polynomu $2x^7+9x^6+16x^5+5x^4-28x^3-52x^2-40x-12 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má alespoň dvojnásobný kořen $i-1$. Polynom rozložte na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$

$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$ $T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ $\sum (X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$

$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení:
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
40	1,6839	2,0211
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\textbf{B}}$
26. května 2010 (UČO:)

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**. Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Polynom s celočíselnými koeficienty je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$, právě když nemá žádné racionální kořeny.

(b) **ano — ne** Existuje nekonečně mnoho grup, které jsou po dvou neizomorfní a přitom má každá právě 2 podgrupy.

(c) **ano — ne** Neexistuje žádný surjektivní homomorfismus $(\mathbb{Z}_{32}, +) \to (\mathbb{Z}_6, +)$.

(d) **ano — ne** Pravděpodobnost hodu alespoň jedné šestky při čtyřech hodech kostkou je větší než 1/2.

(e) **ano — ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že zvětšováním rozsahu výběru se zmenšuje interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

(f) **ano — ne** Je-li střední hodnota náhodné veličiny X rovna 1, pak je i střední hodnota náhodné veličiny $2 \cdot X - 1$ rovna 1 (bez ohledu na rozdělení X).

Příklady:

1. (6 bodů) [zbierka, s.180/23] Na dvou soustruzích se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 16 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 25 z produkce druhého soustruhu. Příslušné vyběrové průměry jsou 37,5 mm, resp. 36,8 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0,1$. Svůj závěr explicitně zformulujte.

2. (6 bodů) [zbierka, s.63/22] Diskrétní náhodný vektor má pravděpodobnostní funkci uvedenou v tabulce:

X \ Y	1	2
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$

a) Určete marginální pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y a rozhodněte jsou-li nezávislé. Načrtněte graf distribuční funkce Y.

b) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $X \cdot Y$.

c) Určete konstantu c tak, aby byly veličiny X a $X + c \cdot Y$ nekorelované.

3. (6 bodů) Uvažte okruh $(\mathbb{Z}_{25}, +, \cdot)$ zbytkových tříd modulo 25.

a) Rozhodněte, zda jde o obor integrity.

b) Určete všechny jednotky (=invertibilní prvky) tohoto okruhu a jejich počet.

c) Rozhodněte, zda je grupa jednotek tohoto okruhu cyklická. Pokud ano, určete některý její generátor.

Vše zdůvodněte.

4. (6 bodů) Určete všechny kořeny polynomu $2x^7 + 3x^6 + 23x^5 + 27x^4 + 88x^3 + 72x^2 + 112x + 48 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $2i$. Polynom rozložte na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$

$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$ $\quad T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ $\quad \sum (X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$

$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení:
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975.$

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
40	1,6839	2,0211
∞	1,6449	1,9600