Matematika 4 $\boxed{\textbf{A}}$
4. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Střední hodnota součinu libovolné dvojice nezávislých náhodných veličin X, Y je rovna součinu středních hodnot těchto veličin.

(b) **ano — ne** Hustota libovolné spojité náhodné veličiny je spojitá na celékm $\mathbb{R}$

(c) **ano — ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že oboustranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ pokrývá oba jednostranné intervaly při téže spolehlivosti.

(d) **ano — ne** Množina $\mathbb{Q}^*$ s operací $x \circ y = |x \cdot y|$ tvoří grupu.

(e) **ano — ne** Grupa symetrií pravidelného pětiúhelníka má 10 prvků a je nekomutativní.

(f) **ano — ne** Libovolná grupa mající 9 prvků má právě dvě podgrupy.

Příklady:

1. (6 bodů) Při 360 hodech kostkou padla šestka 75 krát. Rozhodněte, jestli je možné tvrdit, že jde o ideální kostku na hladině $\alpha = 0{,}05$. Vše zdůvodněte a svůj závěr explicitně formulujte.

2. (6 bodů) Určete distribuční funkci náhodného vektoru (X, Y), jehož hustota je

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(4x - y) & \text{pro } 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete dále $P(X > 2Y)$.

3. (6 bodů) Uvažte grupu Σ_7 všech permutací na sedmiprvkové množině.

(a) Určete všechny prvky podgrupy generované permutací $r = (1,2,3) \circ (4,5,6,7)$.

(b) Určete počet prvků levého rozkladu Σ_7 podle podgrupy gemerované permutací r.

(c) Rozhodněte (a své tvrzení zdůvodněte), je-li $\langle r \rangle$ normální podgrupa Σ_7.

4. (6 bodů) Najděte všechny kořeny polynomu $f = 2x^5 + 9x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 29x + 10 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$. Určete polynom, jehož kořeny jsou právě čísla opačná ke všem kořenům polynomu f (a stejné násobnosti).

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení $(t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu))$:

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\textbf{B}}$
4. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 bod: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Rozptyl součinu libovolné dvojice nezávislých náhodných veličin X, Y je roven součinu rozptylů těchto veličin.

(b) **ano — ne** Hustota libovolné spojité náhodné veličiny nemůže být monotónní funkce.

(c) **ano — ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že zvětšováním rozsahu výběru se zmenšuje i interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

(d) **ano — ne** Pro libovolné přirozené číslo a, které není násobkem 28, platí, že a^{27} dává zbytek 1 po dělení 28.

(e) **ano — ne** Okruh polynomů nad konečným tělesem tvoří těleso.

(f) **ano — ne** Grupa permutací na n-prvkové množině je pro $n \leq 3$ komutativní.

Příklady:

1. (6 bodů) Při 360 hodech kostkou padla šestka 70 krát. Testujte hypotézu, že jde o ideální kostku oproti alternativě, že byla kostka záměrně upravena, aby padalo více šestek, na hladině $\alpha = 0{,}05$. Vše zdůvodněte a svůj závěr explicitně formulujte.

2. (6 bodů) V urně je 14 kuliček – 4 červené, 5 bílých a 5 modrých. Náhodně bez vracení vybereme 6 kuliček. Určete rozložení náhodného vektoru (X, Y), označuje-li X počet tažených červených kuliček a Y počet tažených bílých kuliček. Určete rovněž marginální rozložení veličin X a Y. Dále vypočtěte $P(X \leq 3), P(1 \leq Y \leq 4)$.

3. (6 bodů) Uvažte multiplikativní grupu G invertibilních zbytkových tříd modulo 81 a:

(a) určete její řád,

(b) určete (nebo dokažte, že neexistují) prvek a řádu 9 a prvek b řádu 10 v G,

(c) určete řád podgrupy H generované některým prvkem z b) a počet prvků levého rozkladu G/H,

(d) určete strukturu faktorgrupy G/H (např. uveďte známou grupu, s níž je izomorfní).

4. (6 bodů) Najděte všechny kořeny polynomu $5x^5 + x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Určete polynom, jehož kořeny jsou právě čísla opačná ke všem kořenům polynomu f (a stejné násobnosti).

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum (X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\text{C}}$
4. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Kovarianční matice náhodného vektoru (X, Y) je symetrická.

(b) **ano — ne** Jsou-li X a Y nezávislé, pak jsou i nekorelované.

(c) **ano — ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že se zvyšováním požadované spolehlivosti $1-\alpha$ se zmenšuje interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

(d) **ano — ne** Uvažte množinu $I = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b\} \cup \{\emptyset\}$ otevřených intervalů pod $\mathbb{R}$. Pak je $(I, \cup)$ komutativní grupa.

(e) **ano — ne** Kvadratický polynom (tj. polynom stupně 2) je nad celými čísly ireducibilní právě tehdy, když má záporný diskriminant.

(f) **ano — ne** Pro žádná $k, m \in \mathbb{N}, k, m > 1$ není součin aditivních grup $\mathbb{Z}_k \times Z_m$ cyklická grupa.

Příklady:

1. (6 bodů) Při 360 hodech kostkou padla jednička pouze 45 krát. Rozhodněte, jestli je možné tvrdit, že jde o ideální kostku na hladině $\alpha = 0{,}01$. Vše zdůvodněte a svůj závěr explicitně formulujte.

2. (6 bodů) Určete hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru (X, Y), jehož distribuční funkce je

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -1 \\ \frac{1}{\pi^2}(\arcsin x + \frac{1}{2})(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } |x| < 1 \\ \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Určete rovněž marginální hustoty a rozhodněte, jsou-li veličiny X a Y nezávislé.

3. (6 bodů) Uvažte multiplikativní grupu G invertibilních zbytkových tříd modulo 121 a:

(a) určete její řád,

(b) určete (nebo dokažte, že neexistují) prvek a řádu 9 a prvek b řádu 10 v G,

(c) určete řád podgrupy H generované některým prvkem z b) a počet prvků levého rozkladu G/H,

(d) určete strukturu faktorgrupy G/H (např. uveďte známou grupu, s níž je izomorfní).

4. (6 bodů) Najděte všechny kořeny polynomu $10x^5 + 29x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 9x + 2 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je $\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$. Určete polynom, jehož kořeny jsou právě čísla opačná ke všem kořenům polynomu f (a stejné násobnosti).

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\textbf{D}}$
4. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 bod: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano** — **ne** Kovarianční matice náhodného vektoru (X, Y) je pozitivně definitní.

(b) **ano** — **ne** Nejsou-li X a Y nezávislé, pak ani X^2 a Y^2 nemohou být nezávislé.

(c) **ano** — **ne** Rozptyl součtu nezávislých náhodných veličin je roven součtu jejich rozptylů.

(d) **ano** — **ne** Množina všech matic typu 2 krát 2 nad racionálními čísly tvoří grupu vzhledem ke sčítání.

(e) **ano** — **ne** Grupa $(\mathbb{R}, +)$ nemá žádnou netriviální konečnou podgrupu.

(f) **ano** — **ne** Pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ platí $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ (φ označuje Eulerovu funkci).

Příklady:

1. (6 bodů) Při 360 hodech kostkou padla šestka 80 krát. Testujte hypotézu, že jde o ideální kostku oproti alternativě, že byla kostka záměrně upravena, aby padalo více šestek, na hladině $\alpha = 0{,}01$. Vše zdůvodněte a svůj závěr explicitně formulujte.

2. (6 bodů) V urně je 13 kuliček – 5 červených, 4 bílé a 4 modré. Náhodně bez vracení vybereme 6 kuliček. Určete rozložení náhodného vektoru (X, Y), označuje-li X počet tažených červených kuliček a Y počet tažených bílých kuliček. Určete rovněž marginální rozložení veličin X a Y. Dále vypočtěte $P(1 \le X \le 4), P(Y \le 3)$.

3. (6 bodů) Uvažte grupu Σ_8 všech permutací na osmiprvkové množině.
   (a) Určete všechny prvky podgrupy generované permutací $s = (1, 2) \circ (3, 4, 5) \circ (7, 8)$.
   (b) Určete počet prvků levého rozkladu Σ_8 podle podgrupy gemerované permutací s.
   (c) Rozhodněte (a své tvrzení zdůvodněte), je-li $\langle s \rangle$ normální podgrupa Σ_8.

4. (6 bodů) Najděte všechny kořeny polynomu $x^5 + 5x^4 + x^3 + 5x^2 + x + 5 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Určete polynom, jehož kořeny jsou právě čísla opačná ke všem kořenům polynomu f (a stejné násobnosti).

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:

$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$

$U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$

$T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$

$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$

$\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$

$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$

je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,

kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$

$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,95	0,975
1	0,001	0,004	3,841	5,024
2	0,051	0,103	5,991	7,378
3	0,216	0,352	7,815	9,348
5	0,831	1,145	11,070	12,833
10	3,247	3,940	18,307	20,483
20	9,591	10,851	31,410	34,710
50	32,357	34,764	67,505	71,420
100	74,222	77,929	124,342	129,561

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600