Matematika 4 **A**
10. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Střední hodnota součinu libovolné dvojice nezávislých náhodných veličin X, Y je rovna součinu středních hodnot těchto veličin.

(b) **ano — ne** Pro každou náhodnou veličinu existuje její rozptyl a je jím nezáporné reálné číslo.

(c) **ano — ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že sjednocení jednostranných intervalů spolehlivosti pro střední hodnotu μ obsahuje jako svou podmnožinu oboustranný interval téže spolehlivosti pro μ.

(d) **ano — ne** Existuje nekomutativní grupa G a její vlastní normální podgrupa H tak, že faktorgrupa G/H je komutativní.

(e) **ano — ne** Grupa symetrií pravidelného pětiúhelníka má 10 prvků a je izomorfní $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

(f) **ano — ne** Množina invertibilních matic 2×2 s prvky ze $\mathbb{Z}_2$ tvoří grupu vzhledem ke sčítání.

Příklady:

1. (6 bodů) Na jistém pracovišti bylo náhodně vybráno 6 mužů a 6 žen, jejichž roční příjem (v tis. Kč) činil u mužů: 320, 380, 240, 220, 440, 300, zatímco u žen: 180, 240, 160, 200, 320, 260. Předpokládejte, že jde o realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z normálních rozdělení se stejným rozptylem a na hladině významnosti 0,05 testujte nulovou hypotézu: *střední hodnota platů mužů není vyšší než střední hodnota platů žen* oproti jednostranné alternativě.

2. (6 bodů) Hustota náhodného vektoru (X, Y, Z) je

$$f(x,y,z) = \begin{cases} c(x+y+z) & \text{pro } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c, distribuční funkci a vypočtěte $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{3}, 0 \le Z \le \frac{1}{4})$.

3. (6 bodů) Která z následujících zobrazení $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ jsou homomorfismy grup? Vše zdůvodňujte.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : a)\, x \mapsto 3x; \qquad b)\, x \mapsto 3 + x; \qquad c)\, x \mapsto x^3; \qquad d)\, x \mapsto 1; \qquad e)\, x \mapsto 0.$$

Dále najděte všechny grupové homomorfismy $\mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_{15}$ a $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{24}$.

4. (6 bodů) Mezi všemi normovanými polynomy
a) s komplexními b) s reálnými
koeficienty, které mají jednoduchý kořen -3 a dvojnásobný kořen $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, najděte polynom nejmenšího stupně.

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\textbf{B}}$
10. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano** — **ne** Směrodatná odchylka součtu libovolné dvojice nezávislých náhodných veličin X, Y je rovna součtu jejich směrodatných odchylek.

(b) **ano** — **ne** Střední hodnota libovolné náhodné veličiny je nezáporné číslo.

(c) **ano** — **ne** Jsou-li X a Y nekorelované náhodné veličiny, pak jsou i stochasticky nezávislé.

(d) **ano** — **ne** Pro libovolné přirozené číslo a, které není násobkem 3, platí, že a^{18} dává zbytek 1 po dělení 27.

(e) **ano** — **ne** Okruh polynomů nad libovolným tělesem tvoří obor integrity.

(f) **ano** — **ne** Grupa permutací na n-prvkové množině je pro každé $n \geq 3$ nekomutativní.

Příklady:

1. (6 bodů) Odběratel provádí kontrolu jakosti námi dodaných výrobků namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,2 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10\,\text{mm}; 0{,}0737\,\text{mm}^2)$. S využitím statistických tabulek určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky?
(V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte).

2. (6 bodů) Určete konstantu c tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y^2) & \text{v oblasti ohraničené parabolami } y = x^2,\ y^2 = x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

byla hustotou nějakého náhodného vektoru a určete jeho střední hodnotu.

3. (6 bodů) Která z následujících zobrazení $(\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ jsou homomorfismy grup? Vše zdůvodňujte.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : a)\, x \mapsto 3|x|; \qquad b)\, x \mapsto 3 + |x|; \qquad c)\, x \mapsto |x|^3; \qquad d)\, x \mapsto 1; \qquad e)\, x \mapsto 1/|x|.$$

Dále najděte všechny grupové homomorfismy $\mathbb{Z}_{21} \to \mathbb{Z}_{15}$ a $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{21}$.

4. (6 bodů) Určete polynomy $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ stupně 3 tak, že každý z nich má alespoň jeden dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je polynom $h = x^2 + 2x - 35$. Polynom h vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů f, g (Bezoutova rovnost).

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\text{C}}$
10. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Střední hodnotu náhodné veličiny X lze vypočítat jako derivaci momentové vytvořující funkce této náhodné veličiny v bodě 0.

(b) **ano — ne** Distribuční funkce libovolné náhodné veličiny je spojitá funkce.

(c) **ano — ne** Je-li směrodatná odchylka náhodné veličiny X rovna 1, pak je směrodatná odchylka veličiny $2X - 1$ rovna 2.

(d) **ano — ne** Existuje komutativní grupa G a její vlastní normální podgrupa H tak, že faktorgrupa G/H je nekomutativní.

(e) **ano — ne** Existuje homomorfismus $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, který je surjektivní a není injektivní.

(f) **ano — ne** Každý polynom s reálnými koeficienty má v R aspoň jeden kořen.

Příklady:

1. (6 bodů) Na jistém pracovišti bylo náhodně vybráno 6 mužů a 6 žen, jejichž roční příjem (v tis. Kč) činil u mužů: 320, 380, 240, 220, 440, 300 zatímco u žen: 180, 240, 160, 200, 320, 260. Předpokládejte, že jde o realizace dvou nezávislých náhodných výběrů z normálních rozdělení se stejným rozptylem a na hladině významnosti 0,05 testujte nulovou hypotézu: *střední hodnota platů mužů a žen se neliší* oproti oboustranné alternativě.

2. (6 bodů) Hustota náhodného vektoru (X, Y, Z) je

$$f(x,y,z) = \begin{cases} c(x+y+z) & \text{pro } 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c, příslušnou distribuční funkci a vypočtěte $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{3}, 0 \le Z \le \frac{1}{4})$.

3. (6 bodů) Která z následujících zobrazení $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ jsou homomorfismy grup? Vše zdůvodňujte.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : a)\, x \mapsto 3x; \qquad b)\, x \mapsto 3 + x; \qquad c)\, x \mapsto x^3; \qquad d)\, x \mapsto 1; \qquad e)\, x \mapsto 0.$$

Dále najděte všechny grupové homomorfismy $\mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_{15}$ a $\mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{24}$.

4. (6 bodů) Mezi všemi normovanými polynomy
a) s komplexními b) s reálnými
koeficienty, které mají jednoduchý kořen -1 a dvojnásobný kořen $2 + \frac{3}{2}i$, najděte polynom nejmenšího stupně.

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:

$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$

$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$

$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$

$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$

$\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$

$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$

je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,

kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$

$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\text{D}}$
10. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Je-li střední hodnota náhodné veličiny X rovna 0, pak je rovněž střední hodnota náhodné veličiny X^2 rovna 0 (bez ohledu na rozdělení)

(b) **ano — ne** Jsou-li X a Y nezávislé náhodné veličiny, pak i X^2 a Y^2 jsou nezávislé.

(c) **ano — ne** Rozptyl součtu náhodných veličin je roven součtu jejich rozptylů.

(d) **ano — ne** Množina všech invertibilních matic typu 2 krát 2 nad racionálními čísly tvoří grupu vzhledem k násobení.

(e) **ano — ne** Každý nekonstantní polynom z $\mathbb{C}[x]$ má v $\mathbb{C}$ kořen.

(f) **ano — ne** Existuje homomorfismus $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{Z},+)$, který je injektivní a není surjektivní.

Příklady:

1. (6 bodů) Odběratel provádí kontrolu jakosti námi dodaných výrobků namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,2 mm. Víme, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení $N(10\,\text{mm}; 0{,}0255\,\text{mm}^2)$. S využitím statistických tabulek určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky?
(V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte).

2. (6 bodů) Určete konstantu c tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y) & \text{v oblasti ohraničené parabolami } y = x^2,\ y^2 = x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

byla hustotou nějakého náhodného vektoru a určete jeho střední hodnotu.

3. (6 bodů) Která z následujících zobrazení $(\mathbb{C}^*,\cdot) \to (\mathbb{R}^*,\cdot)$ jsou homomorfismy grup? Vše zdůvodňujte.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : a)\, x \mapsto 3|x|; \qquad b)\, x \mapsto 3+|x|; \qquad c)\, x \mapsto |x|^3; \qquad d)\, x \mapsto 1; \qquad e)\, x \mapsto 1/|x|.$$

Dále najděte všechny grupové homomorfismy $\mathbb{Z}_{28} \to \mathbb{Z}_{16}$ a $\mathbb{Z}_{16} \to \mathbb{Z}_{28}$.

4. (6 bodů) Určete polynomy $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ stupně 3 tak, že každý z nich má alespoň jeden dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je polynom $h = x^2 - 2x - 8$. Polynom h vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů f, g (Bezoutova rovnost).

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum (X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600