Matematika 4 **A**
18. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano** — **ne** Každý polynom nad $\mathbb{R}$ lichého stupně má v $\mathbb{R}$ kořen.

(b) **ano** — **ne** Existuje homomorfismus $(\mathbb{Z}_{18}, +) \to (\mathbb{Z}_8, +)$, který je surjektivní a není injektivní.

(c) **ano** — **ne** Množina všech invertibilních matic typu 3 krát 3 nad celými čísly tvoří grupu vzhledem k násobení.

(d) **ano** — **ne** Je-li střední hodnota náhodné veličiny X rovna -1, pak je i střední hodnota náhodné veličiny $2 \cdot X - 1$ rovna -1 (bez ohledu na rozdělení X).

(e) **ano** — **ne** Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami nepadly dvě trojky, pokud je známo, že součet je dělitelný šesti, je menší než $5/6$.

(f) **ano** — **ne** Pro výběr z normálního rozdělení platí, že jednostranný interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ je podmnožinou oboustranného intervalu téže spolehlivosti pro μ.

Příklady:

1. (6 bodů) Náhodně vybraná konzerva v armádním skladu je vadná s pravděpodobností 0,1. Kolik konzerv musí zásobovací důstojník ze skladu vzít, aby mezi nimi bylo s pravděpodobností 0,9 alespoň 50 bezvadných konzerv. (Předpokládejte, že konzervy jsou vydávány náhodně).

2. (6 bodů) Na úsečce OA délky 1 jsou náhodně zvolené body B a C tak, že $|OB| < |OC|$. Určete pravděpodobnost, že délka úsečky BC je menší než délka úsečky OB. Předpokládejte, že pravděpodobnost volby bodu na konkrétní úsečce je přímo úměrná délce této úsečky (tj. jde o rovnoměrné spojité rozdělení).

3. (6 bodů) U následujících předpisů rozhodněte, zda se jedná o zobrazení, homomorfismus, či dokonce izomorfismus grup. V případě homomorfismů určete jejich jádro. Vše zdůvodňujte (nejde o test!).

(a) $f : (\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_{15}, +);$ $f([a], [b]) = [a + b].$

(b) $g : (\mathbb{Z}_8, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot);$ $g([a]) = i^a.$

(c) $h : (\Sigma_4, \circ) \to (\Sigma_5, \circ);$ $h(s) = (2, 3) \circ s \circ (2, 3).$

4. (6 bodů) Určete všechny kořeny (včetně násobnosti) polynomu

$$x^7 - 10x^6 + 81x^5 - 210x^4 + 420x^3 + 2112x^2 + 340x + 2312 \in \mathbb{C}[x],$$

víte-li, že má alespoň dvojnásobný kořen $3 + 5i$. Polynom rozložte na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\text{B}}$
18. června 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano** — **ne** V každé grupě řádu n existuje alespoň jeden prvek řádu d pro libovolné $d \mid n$.

(b) **ano** — **ne** Žádný polynom nad $\mathbb{C}$ stupně většího než 1 není ireducibilní.

(c) **ano** — **ne** Množina všech matic typu 3 krát 2 nad celými čísly tvoří grupu vzhledem ke sčítání.

(d) **ano** — **ne** Pokud existuje rozptyl náhodné veličiny, je vždy nezáporný.

(e) **ano** — **ne** Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padl součet menší než 6, víme-li, že součet byl sudý, je menší než 1/3.

(f) **ano** — **ne** Pro libovolné reálné číslo r existuje diskrétně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou r.

Příklady:

1. (6 bodů) Ke každému jogurtu běžné značky je náhodně (rovnoměrně) přibalen obrázek některého z 26 hokejových mistrů světa. Kolik jogurtů si fanynka Věrka musí koupit, aby s pravděpodobností 0,95 získala alespoň 5 kartiček Jaromíra Jágra?

2. (6 bodů) Tyč délky 1 je náhodně rozlomena na 3 části. Určete pravděpodobnost, že z těchto částí půjde sestrojit trojúhelník.

3. (6 bodů) U následujících předpisů rozhodněte, zda se jedná o zobrazení, homomorfismus, či dokonce izomorfismus grup. V případě homomorfismů určete jejich jádro. Vše zdůvodňujte (nejde o test!).

(a) $f : (\mathbb{Z}_3, +) \times (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_{15}, +)$; $\quad f([a], [b]) = [10a + 6b]$.

(b) $g : (\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$; $\quad g([a]) = \omega^a$, kde $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

(c) $h : (\Sigma_4, \circ) \to (\Sigma_5, \circ)$; $\quad h(s) = s^2$.

4. (6 bodů) Určete všechny kořeny (včetně násobnosti) polynomu

$$x^7 - 3x^6 - 12x^5 + 18x^4 + 90x^3 - 243x - 243 \in \mathbb{C}[x],$$

víte-li, že má alespoň dvojnásobný kořen $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Polynom rozložte na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600