Matematika 4 **A**
24. září 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Pro libovolné grupy G, H existuje surjektivní homomorfismus G do H.

(b) **ano — ne** Grupa symetrií rovnostranného trojúhelníka je komutativní.

(c) **ano — ne** Kvadratický polynom (tj. polynom stupně 2) je nad celými čísly ireducibilní právě tehdy, když má záporný diskriminant.

(d) **ano — ne** Pravděpodobnost, že při hodu 3 kostkami padlo aspoň jedno sudé a aspoň jedno liché číslo, je větší než 3/4.

(e) **ano — ne** Jsou-li X a Y nekorelované náhodné veličiny, pak jsou i stochasticky nezávislé.

(f) **ano — ne** Je-li střední hodnota náhodné veličiny X i náhodné veličiny Y rovna 0, pak je (bez ohledu na rozdělení veličin X a Y) střední hodnota veličiny $X \cdot Y$ rovna 0.

Příklady:

1. (6 bodů) Náhodně vybraná konzerva v armádním skladu je vadná s pravděpodobností 0,2. Kolik konzerv musí zásobovací důstojník ze skladu vzít, aby mezi nimi bylo s pravděpodobností 0,95 alespoň 50 bezvadných konzerv. (Předpokládejte, že konzervy jsou vydávány náhodně).

2. (6 bodů) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné a záporné.

3. (6 bodů) Uvažte grupu Σ_7 všech permutací na sedmiprvkové množině.

(a) Určete všechny prvky podgrupy generované permutací $r = (1, 2, 3) \circ (4, 5, 6, 7)$.

(b) Určete počet prvků levého rozkladu Σ_7 podle podgrupy generované permutací r.

(c) Rozhodněte (a své tvrzení zdůvodněte), je-li $\langle r \rangle$ normální podgrupa Σ_7.

4. (6 bodů) Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stupně 4, které mají (každý) trojnásobný kořen a jejichž největší společný dělitel je $h(x) = x^2 + x - 2$. Polynom h vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů f, g (Bezoutova rovnost).

Nápověda:

$X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\textbf{B}}$
24. září 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Pro libovolné podgrupy H, K grupy G je i $K \cup H$ podgrupou G.

(b) **ano — ne** Grupa symetrií pravidelného pětiúhelníka je komutativní.

(c) **ano — ne** Polynom stupně n je nad $\mathbb{Q}$ ireducibilní právě tehdy, když v Q nemá kořen.

(d) **ano — ne** Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě trojky, pokud je známo, že součet je dělitelný šesti, nepřevyšuje 1/6.

(e) **ano — ne** Hustotou libovolné spojité náhodné veličiny nemůže být monotónní funkce.

(f) **ano — ne** Rozptyl součtu nezávislých náhodných veličin je roven součtu jejich rozptylů.

Příklady:

1. (6 bodů) Ke každému jogurtu běžné značky je náhodně (rovnoměrně) přibalen obrázek některého z 26 hokejových mistrů světa. Kolik jogurtů si fanynka Věrka musí koupit, aby s pravděpodobností 0,90 získala alespoň 10 kartiček Jaromíra Jágra?

2. (6 bodů) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 4$, $|b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné.

3. (6 bodů) Uvažte multiplikativní grupu G invertibilních zbytkových tříd modulo 81 a:

(a) určete její řád,

(b) určete (nebo dokažte, že neexistují) prvek a řádu 9 a prvek b řádu 10 v G,

(c) určete řád podgrupy H generované některým prvkem z b) a počet prvků levého rozkladu G/H,

(d) určete strukturu faktorgrupy G/H (např. uveďte známou grupu, s níž je izomorfní).

4. (6 bodů) Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stupně 4, které mají (každý) trojnásobný kořen a jejichž největší společný dělitel je $h(x) = x^2 + 2x - 3$. Polynom h vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů f, g (Bezoutova rovnost).

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení $(t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu))$:

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\text{C}}$
24. září 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Pro libovolné grupy G, H existuje homomorfismus G do H.

(b) **ano — ne** Grupa Σ_3 permutací na tříprvkové množině je komutativní.

(c) **ano — ne** Kvadratický polynom (tj. polynom stupně 2) je nad racionálními čísly ireducibilní právě tehdy, když má záporný diskriminant.

(d) **ano — ne** Kovarianční matice náhodného vektoru (X, Y) je symetrická.

(e) **ano — ne** Jsou-li X a Y stochasticky nezávislé, pak jsou i nekorelované.

(f) **ano — ne** Je-li rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X roven 1, pak je rozptyl veličiny $X+1$ roven rovněž 1.

Příklady:

1. (6 bodů) Předpokládáme, že přidáním speciálních přípravků je možné snížit tvrdost vody. Náhodným výběrem 40 vzorků vody byla zjištěna průměrná tvrdost 4,0. Po přidání přípravku pak byla změřena na 50 vzorcích průměrná tvrdost 3,8. Na hladině významnosti 5% testujte nulovou hypotézu oproti předpokládané jednostranné alternativě za předpokladu, že oba výběry pocházejí z normálního rozdělení s rozptylem 0,25. Svůj závěr explicitně zformulujte.

2. (6 bodů) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné a kladné.

3. (6 bodů) Uvažte multiplikativní grupu G invertibilních zbytkových tříd modulo 121 a:

(a) určete její řád,

(b) určete (nebo dokažte, že neexistují) prvek a řádu 9 a prvek b řádu 10 v G,

(c) určete řád podgrupy H generované některým prvkem z b) a počet prvků levého rozkladu G/H,

(d) určete strukturu faktorgrupy G/H (např. uveďte známou grupu, s níž je izomorfní).

4. (6 bodů) Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stupně 4, které mají (každý) trojnásobný kořen a jejichž největší společný dělitel je $h(x) = x^2 - x - 2$. Polynom h vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů f, g (Bezoutova rovnost).

Nápověda:

$X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M) = \mu$, $D(M) = \sigma^2/n$, $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2) = \sigma^2$
$U = (M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0,1)$
$T = (M-\mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$
$K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$
$M_1 - M_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, pak $K = (m+n-2)S_*^2/\sigma^2 \sim \chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2 = ((m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_*\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$
$\Phi(0{,}05) \approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65) \approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96) \approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33) \approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58) \approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu) = -t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600

Matematika 4 $\boxed{\textbf{D}}$
24. září 2010 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr	Teorie	1.	2.	3.	4.	$\sum$

Potřebné minimum (**včetně semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

Teorie: (6krát ± 1 **bod**: tj. správně 1 bod, chybně -1 bod, bez odpovědi 0)
Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!), ani zde **nemůžete celkově získat záporný počet bodů**:

(a) **ano — ne** Jádro každého homomorfismu obsahuje neutrální prvek.

(b) **ano — ne** Žádný polynom nad $\mathbb{C}$ stupně většího než 1 není ireducibilní (tj. $\forall f \in \mathbb{C} : st(f) > 1 \implies f$ je reducibilní).

(c) **ano — ne** Grupa symetrií čtverce je komutativní.

(d) **ano — ne** Distribuční funkce libovolné náhodné veličiny je neklesající funkce.

(e) **ano — ne** Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padl součet dělitelný 4, víme-li, že součet byl dělitelný 2, je aspoň 1/2.

(f) **ano — ne** Rozptyl součtu náhodných veličin je roven součtu jejich rozptylů.

Příklady:

1. (6 bodů) Na dvou soustruzích se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 16 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 25 z produkce druhého soustruhu. Příslušné vyběrové průměry jsou 37,5 mm, resp. 36,8 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0,1$. Svůj závěr explicitně zformulujte.

2. (6 bodů) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož reálné koeficienty splňují $|a| \leq 4, |b| \leq 2$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné a záporné.

3. (6 bodů) Uvažte grupu Σ_8 všech permutací na osmiprvkové množině.

(a) Určete všechny prvky podgrupy generované permutací $s = (1,2) \circ (3,4,5) \circ (7,8)$.

(b) Určete počet prvků levého rozkladu Σ_8 podle podgrupy generované permutací s.

(c) Rozhodněte (a své tvrzení zdůvodněte), je-li $\langle s \rangle$ normální podgrupa Σ_8.

4. (6 bodů) Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ stupně 4, které mají (každý) trojnásobný kořen a jejichž největší společný dělitel je $h(x) = x^2 - 2x - 3$. Polynom h vyjádřete jako lineární kombinaci polynomů f, g (Bezoutova rovnost).

Nápověda:

$X_1,\dots,X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2:
$M=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ **výběrový průměr** .... $E(M)=\mu$, $D(M)=\sigma^2/n$, $M\sim N(\mu,\sigma^2/n)$
$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i-M)^2$ **výběrový rozptyl** .... $E(S^2)=\sigma^2$
$U=(M-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})\sim N(0,1)$
$T=(M-\mu)/(S/\sqrt{n})\sim t(n-1)$
$K=(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$
$\sum(X_i-\mu)^2/\sigma^2\sim\chi^2(n)$
$M_1-M_2\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n})$
je-li $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, pak $K=(m+n-2)S_*^2/\sigma^2\sim\chi^2(m+n-2)$,
kde $S_*^2=((m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2)/(m+n-2)$
$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1)$.

Intervaly spolehlivosti:

μ (známe σ^2)	$(M-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}, M+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1), M+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
σ^2 (známe μ)	$\left(\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)},\frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)$
$\mu_1-\mu_2$ (známe σ_1^2,σ_2^2)	$M_1-M_2\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1-\mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2=\sigma_2^2$)	$M_1-M_2\pm S_*\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení: $\Phi(-u)=1-\Phi(u)$
$\Phi(0{,}05)\approx 0{,}52$, $\Phi(1{,}65)\approx 0{,}95$, $\Phi(1{,}96)\approx 0{,}975$, $\Phi(2{,}33)\approx 0{,}99$, $\Phi(2{,}58)\approx 0{,}995$.

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Kvantily Pearsonova rozdělení χ^2:

volnost	0,025	0,05	0,10	0,50	0,90	0,95	0,975
1	0,001	0,004	0,016	0,455	2,71	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,991	7,378
3	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,815	9,348
5	0,831	1,145	1,61	4,35	9,24	11,070	12,833
10	3,247	3,940	4,87	9,34	16,0	18,307	20,483
20	9,591	10,851	12,4	19,3	28,4	31,410	34,170
50	32,357	34,764	37,7	49,3	63,2	67,505	71,420

Kvantily Studentova t-rozdělení ($t_\alpha(\nu)=-t_{1-\alpha}(\nu)$):

volnost ν	0,95	0,975
1	6,3138	12,7062
2	2,9200	4,3027
3	2,3534	3,1824
4	2,1318	2,7764
5	2,0150	2,5706
10	1,8125	2,2281
20	1,7247	2,0860
30	1,6973	2,0423
∞	1,6449	1,9600