Matematika IV, 15. dubna 2010 $\boxed{\text{A}}$ Jméno:
Max. 7,5 b. UČO:

1. (1,5 b.) [*Na každou otázku* $\pm 0,5$ *b., bez odpovědi 0b., celkem min. 0 b.*]

ano — ne Grupa symetrií pravidelného pětiúhelníka má 10 prvků a obsahuje podgrupu izomorfní s grupou $(\mathbb{Z}_2,+)$.

ano — ne Každý konečný obor integrity je těleso.

ano — ne Množina všech matic typu 2 krát 2 nad racionálními čísly tvoří aditivní grupu.

2. (2 b.) Jsou dány permutace $f,g,h \in \mathbb{S}_9$ předpisem

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 9 & 7 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad h = f \circ g.$$

(a) Napište permutace f,g a h jako součin (tj. složení) navzájem nezávislých cyklů.

(b) Určete paritu permutací f,g a h.

(c) Spočtěte permutaci $f^{2011} \circ g^{2011}$ a napište ji jako součin navzájem nezávislých cyklů.

(d) Určete počet inverzí permutace f.

3. (2,5 b.) Určete všechny racionální kořeny polynomu $2x^5+11x^4+25x^3+28x^2+15x+3$ a rozložte jej na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$.

4. (1 b.) Určete počet jednotek okruhu $(\mathbb{Z}_{2010},+,\cdot)$ a inverzi prvku $[1003]_{2010}$.

5. (0,5 b.) Určete jádro homomorfismu grup $\varphi : (\mathbb{Z}_{15},+) \to (\mathbb{Z}_3,+) \times (\mathbb{Z}_5,+)$, $\qquad \varphi([a]_{15}) = ([2a]_3,[2a]_5)$

Matematika IV, 15. dubna 2010 $\boxed{\text{B}}$ Jméno:
Max. 7,5 b. UČO:

1. (1,5 b.) [*Na každou otázku* $\pm 0,5$ *b., bez odpovědi 0b., celkem min. 0 b.*]

ano — ne Grupa $(\mathbb{R}^{\times},\cdot)$ nemá žádnou netriviální konečnou podgrupu.

ano — ne Každý injektivní homomorfismus okruhů má jednoprvkové jádro.

ano — ne Dávají-li 2 čísla stejný zbytek modulo 100, dávají stejný zbytek i modulo 25.

2. (2 b.) Jsou dány permutace $f,g,h \in \mathbb{S}_9$ předpisem

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad h = f \circ g.$$

(a) Napište permutace f,g a h jako součin (tj. složení) navzájem nezávislých cyklů.

(b) Určete paritu permutací f,g a h.

(c) Spočtěte permutaci $f^{-99} \circ g^{-99}$ a napište ji jako součin navzájem nezávislých cyklů.

(d) Určete počet inverzí permutace f.

3. (2,5 b.) Určete všechny racionální kořeny polynomu $5x^5+12x^4+11x^3+3x^2-4x-3$ a rozložte jej na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$.

4. (1 b.) Určete počet generátorů v grupě $(\mathbb{Z}_{60},+)$ a počet podgrup této grupy.

5. (0,5 b.) Určete jádro homomorfismu grup $\alpha : (\mathbb{Z}_8^{\times},\cdot) \to (\mathbb{Z}_8^{\times},\cdot)$, $\qquad \alpha([a]_8) = [a^2]_8$

Matematika IV, 15. dubna 2010 $\boxed{\text{C}}$ **Jméno:**
Max. 7,5 b. **UČO:**

---

1. (1,5 b.) [*Na každou otázku* $\pm 0,5$ *b., bez odpovědi 0b., celkem min. 0 b.*]

ano — ne Množina $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ s operací $x \circ y = |x \cdot y|$ tvoří grupu.

ano — ne Faktorgrupa komutativní grupy je vždy komutativní.

ano — ne Každý obor integrity je těleso.

2. (2 b.) Jsou dány permutace $f, g, h \in \mathbb{S}_9$ předpisem

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad h = f \circ g.$$

(a) Napište permutace f, g a h jako součin (tj. složení) navzájem nezávislých cyklů.

(b) Určete paritu permutací f, g a h.

(c) Spočtěte permutaci $f^{1999} \circ g^{1999}$ a napište ji jako součin navzájem nezávislých cyklů.

(d) Určete počet inverzí permutace f.

3. (2,5 b.) Určete všechny racionální kořeny polynomu $2x^4+5x^3+10x^2+10x+3$ a rozložte jej na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4. (1 b.) Určete počet jednotek okruhu $(\mathbb{Z}_{1010}, +, \cdot)$ a najděte v tomto okruhu multiplikativní inverzi prvku $[93]_{1010}$.

5. (0,5 b.) Rozhodněte, zda $\gamma : (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_5, +) \to (\mathbb{Z}_{10}, +)$ dané předpisem $\gamma(([a]_2, [b]_5)) = [a+b]_{10}$, je homomorfismem grup a v kladném případě určete jeho jádro. Zdůvodněte.

Matematika IV, 15. dubna 2010 $\boxed{\text{D}}$ **Jméno:**
Max. 7,5 b. **UČO:**

---

1. (1,5 b.) [*Na každou otázku* $\pm 0,5$ *b., bez odpovědi 0b., celkem min. 0 b.*]

ano — ne Neexistuje žádný surjektivní homomorfismus $(\mathbb{Z}_{30}, +) \to (\mathbb{Z}_8, +)$.

ano — ne Každá lichá permutace je transpozicí.

ano — ne Pro polynomy nad libovolným okruhem platí, že stupeň součinu dvou polynomů je součtem stupňů těchto polynomů.

2. (2 b.) Jsou dány permutace $f, g, h \in \mathbb{S}_9$ předpisem

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 5 & 9 & 6 & 4 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 8 & 5 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad h = f \circ g.$$

(a) Napište permutace f, g a h jako součin (tj. složení) navzájem nezávislých cyklů.

(b) Určete paritu permutací f, g a h.

(c) Spočtěte permutaci $f^{2004} \circ g^{2004}$ a napište ji jako součin navzájem nezávislých cyklů.

(d) Určete počet inverzí permutace f.

3. (2,5 b.) Určete všechny racionální kořeny polynomu $3x^4+4x^3-14x^2-11x-2$ a rozložte jej na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4. (1 b.) Určete počet invertibilních prvků v pologrupě $(\mathbb{Z}_{2016}, \cdot)$ a určete inverzi prvku $[401]_{2016}$ (nebo dokažte, že neexistuje).

5. (0,5 b.) Uveďte příklad netriviálního homomorfismu $(\mathbb{C}^\times, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{12}^\times, \cdot)$.