Matematika IV, 20. května 2010 $\boxed{\textbf{A}}$ **Jméno:**
Max. 7,5 b. **UČO:**

1. (1,5 b.) [*Na každou otázku* $\pm 0,5$ *b., bez odpovědi 0b., celkem min. 0 b.*]

ano — ne Je-li rozptyl $D(X)$ náhodné veličiny X roven 1, pak je rozptyl veličiny $X + 1$ roven 2.

ano — ne Distribuční funkce libovolné náhodné veličiny je zprava spojitá nezáporná funkce.

ano — ne Pravděpodobnost, že při třech hodech běžnou kostkou padnou tři různá čísla, nepřevyšuje $\frac{1}{2}$.

2. (2 b.) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné.

3. (2 b.) Nezáporná náhodná veličina X má distribuční funkci danou vztahem $F(x) = x^2/4$ pro $0 \leq x \leq 2$ a $F(x) = 1$ pro $x > 2$. Ověřte, že jde skutečně o distribuční funkci a určete $E(X), D(X)$.

4. (2 b.) Na FI je 10% studentů s prospěchem do 1,2. Jak velkou skupinu je třeba vybrat, aby s pravděpodobností 0,95 v ní bylo 8-12% studentů s prospěchem do 1,2? Úlohu řešte zvlášť pomocí Čebyševovy a zvlášť pomocí Moivre-Laplaceovy věty.

Distribuční funkce $N(0,1)$**:**
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975.$

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Matematika IV, 20. května 2010 $\boxed{\text{B}}$ **Jméno:**
Max. 7,5 b. **UČO:**

1. (1,5 b.) [*Na každou otázku* $\pm 0,5$ *b., bez odpovědi 0b., celkem min. 0 b.*]

ano — **ne** Je-li střední hodnota náhodné veličiny X rovna 0, pak je rovněž střední hodnota náhodné veličiny X^2 rovna 0 (bez ohledu na rozdělení)

ano — **ne** Hustota libovolné spojité náhodné veličiny je monotónní funkce.

ano — **ne** Pravděpodobnost, že při hodu dvěma běžnými kostkami padne součet menší než 7 je stejná jako že součet bude větší než 7.

2. (2 b.) Turistický oddíl si předává zprávy Morseovou abecedou s těmito vlastnostmi: pokud je odvysílána *tečka*, pak ve 40% případů je přijata čárka (jinak tečka), pokud je odvysílána *čárka*, je v 1/3 případů přijata tečka (jinak čárka). Zpráva obsahuje tečky a čárky v poměru 5 : 3. Určete pravděpodobnost,

- že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá čárka,
- že byla vyslaná tečka, pokud je přijatá tečka.

3. (2 b.) Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení s nenulovou hustotou na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = \sin X$.

4. (2 b.) Série se nepřijme, pokud se v ní objeví alespoň 10 vadných součástek. Kolik náhodně vybraných součástek je třeba zkontrolovat, abychom mohli s pravděpodobností 0,9 tvrdit, že série, v níž je 10% vadných součástek, nebude přijatá.

Distribuční funkce $N(0,1)$**:**
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975.$

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Matematika IV, 20. května 2010 $\boxed{\text{C}}$ **Jméno:**

Max. 7,5 b. **UČO:**

1. (1,5 b.) [*Na každou otázku* $\pm 0,5$ *b., bez odpovědi 0b., celkem min. 0 b.*]

ano — ne Je-li střední hodnota náhodné veličiny X i náhodné veličiny Y rovna 0, pak je (bez ohledu na rozdělení veličin X a Y) střední hodnota veličiny $X+Y$ rovna 0.

ano — ne Koeficient korelace dvou náhodných veličin nepřevyšuje jejich kovarianci.

ano — ne Pravděpodobnost, že ze tří hodů běžnou kostkou padne alespoň jedna šestka, nepřevyšuje $\frac{1}{2}$.

2. (2 b.) Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné. Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou kladné.

3. (2 b.) Nezáporná náhodná veličina X má hustotu danou vztahem $f(x) = \cos x$ pro $0 \leq x \leq \pi/2$ a $f(x) = 0$ pro $x > \pi/2$. Ověřte, že jde skutečně o hustotu a určete $E(X), D(X)$.

4. (2 b.) V urně je 10 míčků s čísly 0 až 9. Postupně s vracením vytáhneme n míčků. Kolik míčků je třeba vytáhnout, aby s pravděpodobností 0,95 byla relativní četnost tažení čísla 5 mezi 0,09 a 0,11? Výsledek určete nejprve pomocí Čebyševovy nerovnosti a poté pomocí Moivre-Laplaceovy věty.

Distribuční funkce $N(0,1)$:
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975.$

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773

Matematika IV, 20. května 2010 $\boxed{\textbf{D}}$ **Jméno:**
Max. 7,5 b. **UČO:**

1. (1,5 b.) [*Na každou otázku* $\pm 0,5$ *b., bez odpovědi 0b., celkem min. 0 b.*]

ano — ne Je-li střední hodnota náhodné veličiny X rovna 0, pak je (bez ohledu na rozdělení veličin X a Y) střední hodnota veličiny $X \cdot Y$ rovna 0.

ano — ne Pro libovolné jevy A, B platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ano — ne Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padla na některé z nich 5, víme-li, že součet ok na obou kostkách je 8, je větší než 1/3.

2. (2 b.) Turistický oddíl si předává zprávy Morseovou abecedou s těmito vlastnostmi: pokud je odvysílána *tečka*, pak ve 40% případů je přijata čárka (jinak tečka), pokud je odvysílána *čárka*, je v 1/3 případů přijata tečka (jinak čárka). Zpráva obsahuje tečky a čárky v poměru 5 : 3. Určete pravděpodobnost,

- že byla vyslaná čárka, pokud je přijatá čárka,
- že byla vyslaná čárka, pokud je přijatá tečka.

3. (2 b.) Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení s nenulovou hustotou na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = \operatorname{tg} X$.

4. (2 b.) Průměrná rychlost větru je na určitém místě 20 km/hod.

- Bez ohledu na rozdělení rychlosti větru jako náhodné veličiny určete pravděpodobnost, že při jednom pozorování rychlost větru nepřesáhne 60 km/h.
- Určete interval, v němž se bude rychlost větru nacházet s pravděpodobností alespoň 0,9, víte-li navíc, že směrodatná odchylka $\sigma = 1$ km/hod.

Distribuční funkce $N(0,1)$**:**
$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u), \Phi(0,05) \approx 0,52, \Phi(1,65) \approx 0,95, \Phi(1,96) \approx 0,975.$

u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi(u)$	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7258	0,7580	0,7881	0,8159	0,8413
u	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Phi(u)$	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9773