(A) Teorie: a) ANO b) NE c) NE d) NE e) ANO f) NE

(1) $n=360$, Moivre-Laplace: $\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

$$0{,}95 = P\left(-u_{0,975} \le \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le u_{0,975}\right) = P\left(-1{,}96\cdot\sqrt{50} \le X_n - 60 \le 1{,}96\cdot\sqrt{50}\right)$$

Protože $|75-60| > 1{,}96\cdot\sqrt{50}$, hypotézu, že kostka není upravená, zamítáme.

(2) $P(X>2Y)=0$, protože $P(1\le X\le 2)=1$, $P(2\le Y\le 4)=1$.

Distrib. funkce: zřejmě, je-li $x<1$ nebo $y<2$, je $F(x,y)=0$

Pro $1\le x\le 2,\ 2\le y\le 4$ je $F(x,y)=\int_1^x\int_2^y f(u,v)\,dv\,du = \int_1^x\int_2^y \frac16(4u-v)\,dv\,du =$

$$= \dots = \frac{1}{12}(4x^2y - xy^2 - 8x^2+4x-4y+y^2+4) = \frac{1}{12}(y-2)(x-1)(4x-y+2)$$

Pro $1\le x\le 2,\ y>4$ je $F(x,y)=F(x,4)=\frac16(x-1)(4x-2)$

Pro $x>2,\ 2\le y\le 4$ je $F(x,y)=F(2,y)=\frac{1}{12}(y-2)(10-y)$

Pro $x>2,\ y>4$ je $F(x,y)=1$.

(3) a) $r=(1,2,3)(4,5,6,7)$, $r^2=(1,3,2)(4,6)(5,7)$, $r^3=(4,7,6,5)$, $r^4=(1,2,3)$, $r^5=(1,3,2)(4,5,6,7)$, … $r^{11}=(1,3,2)(4,7,6,5)$, $r^{12}=id$

b) $7!/12$

c) není normální, např. $(1,4)\circ(1,2,3)(4,5,6,7)\circ(1,4)^{-1} = (1,5,6,7)(4,2,3) \notin \langle r\rangle$

(4) Je-li $\frac{1-i\sqrt7}{2}$ kořenem, je kořenem i $\frac{1+i\sqrt7}{2}$, a tedy f je dělitelný polynomem x^2-x+2. Po vydělení dostaneme polynom $2x^3+11x^2+17x+5$, u něhož zjistíme racionální kořen $-\frac52$, po vydělení získáme x^2+3x+1 s kořeny $\frac{-3\pm\sqrt5}{2}$,

$f = 2x^5+9x^4+10x^3+10x^2+29x+10$

Obecně platí: má-li polynom f kořeny $x_1,\dots,x_n$ a je-li normovaný, pak $f=(x-x_1)\dots(x-x_n)$. Opačné kořeny má polynom $(x+x_1)\dots(x+x_n)$, což v našem případě (i bez znalosti kořenů) dá polynom

$2x^5-9x^4+10x^3-10x^2+29x-10$

(B) Teorie: a) NE ~~b) ANO~~ c) ANO d) NE e) NE f) NE

b) NE

(1) $n=360$, Moivre-Laplace $\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

$$0{,}95 = P\left(\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le u_{0{,}95}\right) = P\left(X_n - 60 \le \sqrt{50}\cdot 1{,}65\right)$$

Protože $70-60 \not> \sqrt{50}\cdot 1{,}65 \approx 11{,}67$, hypotézu, že jde o ideální kostku, nezamítáme.

(2) $$f(x,y) = \frac{\binom{4}{x}\cdot\binom{5}{y}\cdot\binom{5}{6-x-y}}{\binom{14}{6}} \quad \text{pro } x=0,1,\dots,4;\ y=0,1,\dots,5;\ 1\le x+y\le 6$$

$= 0$ jinak

$$f_X(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{10}{6-x}}{\binom{14}{6}} \text{ pro } x=0,1,\dots,4 \ (0 \text{ jinak}) \qquad f_Y(y) = \frac{\binom{5}{y}\binom{9}{6-y}}{\binom{14}{6}} \text{ pro } y=0,1,\dots,5 \ (0 \text{ jinak})$$

$$P(X\le 3) = 1-\frac{\binom{10}{2}}{\binom{14}{6}} \qquad P(1\le Y\le 4) = \frac{1}{\binom{14}{6}}\sum_{y=1}^{4}\binom{5}{y}\binom{9}{6-y}$$

(3) a) $|\mathbb{Z}_{81}^{\times}| = \varphi(81) = \varphi(3^4) = 2\cdot 3^3 = 54$

b) $10 \nmid 54 \Rightarrow$ neexistuje prvek řádu 10. Prvek řádu 9 je např. $[2^6]$, protože $[2]$ je generátor, tedy řádu 54 (všechny prvky řádu 9 jsou $[2]^{6k}$, $k=1,\dots,8$).

c) $|H| = 9$, $|G/H| = 54/9 = 6$

d) G je cyklická, je proto i G/H cyklická $\Rightarrow G/H \cong (\mathbb{Z}_6,+)$

(4) $f = 5x^5+x^4+5x^3+x^2+5x+1$ má kořen $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, tedy i $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, je tedy dělitelný polynomem x^2+x+1. Po vydělení dostaneme polynom $5x^3-4x^2+4x+1$, jenž má racionální kořen $-\frac{1}{5}$. Po vydělení $5x+1$ dostaneme x^2-x+1 s kořeny $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Opačné kořeny (viz A) má polynom $5x^5-x^4+5x^3-x^2+5x-1$.

(C) Teorie: a) ANO b) ANO c) NE d) NE e) NE f) NE

(1) $n=360$ Moivre-Laplace $\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

$$0{,}99 = P\left(-u_{0{,}995} \le \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le u_{0{,}995}\right) = P\left(-2{,}58\cdot\sqrt{50} \le X_n-60 \le 2{,}58\cdot\sqrt{50}\right)$$

Protože $|45-60| \not> 2{,}58\cdot\sqrt{50} \approx 18{,}24$, hypotézu, že jde o ideální kostku, na hladině 0,01 nezamítáme.

(2) Hustota $f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{1+y^2}$ pro $|x|<1$
$= 0$ jinak

Marginální hustoty: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\operatorname{arctg} y\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $|x|<1$, jinak 0.

$f_Y(y) = \int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx = \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{1}{\pi^2}\left[\arcsin x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}$.

Protože $\forall x,y\in\mathbb{R}$: $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$, jsou X,Y nezávislé.

(3) a) $|\mathbb{Z}_{121}^{\times}| = \varphi(121) = \varphi(11^2) = 10\cdot 11 = 110$

b) $9 \nmid 110 \Rightarrow a$ neexistuje. Např. $b=[-3]$ ($[3]$ je řádu 5, $[-1]$ řádu 2)
nebo $[2]^{11}=[-9]$ (neboť $\langle[2]\rangle = G$)

c) $|H| = |\langle b\rangle| = 10$ (= řád b),
$|G/H| = 110/10 = 11$

d) $G/H \cong \mathbb{Z}_{11}$ (jediná grupa řádu 11)

(4) $f = 10x^5+29x^4+10x^3+10x^2+9x+2$

Má-li kořen $\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$, má rovněž kořen $\frac{1-i\sqrt{7}}{4}$ a je tedy dělitelný polynomem $2x^2-x+1$, po vydělení dostaneme $5x^3+17x^2+11x+2$, který má racionální kořen $-\frac{2}{5}$ a po vydělení $5x+2$ dostaneme x^2+3x+1 s kořeny $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Opačné kořeny (viz 4) má polynom $10x^5-29x^4+10x^3-10x^2+9x-2$

D Teorie: a) NE b) NE c) ANO d) ANO e) ANO f) NE

(1) $n=360$, Moivre-Laplace: $\dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$

$$0{,}99 = P\left(\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le u_{0,99}\right) = P\left(X_n - np \le u_{0,99}\cdot\sqrt{np(1-p)}\right) =$$
$$= P\left(X_n - 60 \le 2{,}33\sqrt{50}\right)$$

Protože $80-60 > 2{,}33\sqrt{50} \approx 15{,}70$, jednostrannou hypotézu, že jde o ideální kostku, zamítáme ve prospěch alternativní hypotézy.

(2) $f(x,y) = \dfrac{1}{\binom{13}{6}}\cdot\binom{5}{x}\binom{4}{y}\binom{4}{6-x-y}$ pro $x=0,1,\dots,5$, $y=0,1,\dots,4$, $2\le x+y\le 6$

$= 0$ jinak

$f_X(x) = \dfrac{1}{\binom{13}{6}}\binom{5}{x}\binom{8}{6-x}$ pro $x=0,\dots,5$

$f_Y(y) = \dfrac{1}{\binom{13}{6}}\binom{4}{y}\binom{9}{6-y}$ pro $y=0,\dots,4$

$P(1\le X\le 4) = 1 - \dfrac{\binom{8}{6}+\binom{8}{1}}{\binom{13}{6}}$ $\quad P(Y\le 3) = 1 - \dfrac{\binom{9}{2}}{\binom{13}{6}}$

(3) a) $s=(1,2)(3,4,5)(7,8)$, $s^2=(3,5,4)$, $s^3=(1,2)(7,8)$
$s^4=(3,4,5)$, $s^5=(1,2)(3,5,4)(7,8)$, $s^6=id$

b) $8!/6$

c) $\langle s\rangle \ntrianglelefteq \Sigma_8$, neboť např. $(1,3)\circ s\circ(1,3)^{-1} = (1,4,5)(2,3)(7,8) \notin \langle s\rangle$

(4) $f = x^5+5x^4+x^3+5x^2+x+5$ má kořen $-\frac{1+i\sqrt3}{2}$, tedy i $-\frac{1-i\sqrt3}{2}$.
Je tedy dělitelný polynomem x^2+x+1. Dostaneme x^3+4x^2-4x+5 s racionálním kořenem -5. Po vydělení $x+5$ máme polynom x^2-x+1 s kořeny $\frac{1\pm i\sqrt3}{2}$.

Polynomem s opačnými kořeny (viz A) je $x^5-5x^4+x^3-5x^2+x-5$.